ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS: UN ANÁLISIS DESDE LA FILOSOFÍA MARXISTA DE LA CIENCIA

ISADORE NABI

I. Estructura Algebraica

Es aquella $n - pla$ de la forma $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, en el cual λ_1 es un conjunto preestablecido no nulo y $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ es un conjunto de operaciones aplicables a los elementos del conjunto λ_1.

II. Operador

Símbolo matemático que indica que debe ser efectuada una operación específica sobre un cierto número de variables (números, funciones, vectores, entre otros), usualmente aparece denotado mediante la letra f. Es importante aclarar, con la finalidad de evitar confusiones, que, en el contexto del Álgebra Lineal, un operador expresa una determinada relación entre dos espacios vectoriales; sin embargo, cuando los espacios vectoriales son iguales entonces al operador usualmente se le llama también como *aplicación*. En el contexto del Álgebra Abstracta, operador y aplicación son equivalentes, al igual que el término conocido como *función*.

III. Operandos

Variables sobre las cuales se especifica una operación a realizar mediante un operador.

IV. Operación Binaria

Operación matemática que para el cálculo de un valor requiere de un operador y dos operandos.

V. Ley de Composición

Aquella operación binaria que da lugar a distintas estructuras algebraicas. Como puede observarse, esta es una definición concebida específicamente para el análisis de las estructuras algebraicas.

Los espacios euclidianos y los espacios de Hilbert vistos en la subsección anterior son espacios vectoriales que cumplen determinadas condiciones adicionales. Desde el punto de vista del Álgebra Abstracta, en estos espacios (y en otros, pero estos son de especial interés científico) se encuentran definidas una ley de composición interna llamada *suma* para los elementos del conjunto y una ley de composición externa llamada *producto por un escalar* definida entre dicho conjunto y otro conjunto llamado campo o cuerpo, el cual tiene dos leyes de composición interna llamadas *adición* y *multiplicación*, las cuales a su vez cumplen con determinadas propiedades y en el cual existen determinados elementos, como se verá más adelante.

VI. Ley de Composición Interna

Una ley de composición es interna si la operación binaria asigna a todo par ordenado cuyos elementos pertenecen a un conjunto determinado, un tercer elemento que pertenece también a dicho conjunto, por ejemplo, las suma entre dos números naturales (será siempre un número natural) o la multiplicación entre dos números racionales (será siempre un número racional), así como la unión y la intersección de dos conjuntos, es decir, la formación de un nuevo conjunto que incluya todos los elementos de los conjuntos unidos (sin repeticiones) y la formación de un conjunto que incluya solo los elementos que los conjuntos intersecados tienen en común, respectivamente.

Formalmente se expresa como:

Dado un conjunto A y una operación $\odot$, representado como $2-tupla$ horizontal $(A,\odot)$, $\odot$ es una ley de composición interna en el conjunto A cuando es una función (la ley de composición que asigna a cada elemento de un primer conjunto un único elemento de un segundo conjunto[1]) de la siguiente forma:

$$\odot: A \times A \longrightarrow A$$

[1] Evidentemente, puede tratarse del mismo conjunto.

$$(a, b) \longmapsto c = a \odot b$$

$$\forall (a, b) \in A \times A, \qquad \exists!\, c \in A: c = a \odot b$$

Una forma sintética (aunque menos clara) de expresar lo anterior se presenta a continuación. Sean $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ y $\mathfrak{S}$ tres conjuntos no vacíos. Un operador f, $f: \mathcal{E} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathfrak{S}$ (en donde la flecha denota "implica que", lo que en este caso significa que la operación $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$ implica el resultado $\mathfrak{S}$) se llama ***ley de composición interna u operación***; $\forall\ (x, y) \in \mathcal{E} \times \mathcal{F}$, $f(x, y)$ se llama el ***operado*** de x con y, como se verifica en (González, 2003, pág. 128)

VII. Ley de Composición Externa

Una ley de composición es externa, si los dos operandos no pertenecen al mismo conjunto. De manera formal, si $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ y $\mathfrak{S}$ son tres conjuntos no vacíos, entonces cuando $\mathcal{E} = \mathcal{F} = \mathfrak{S}$, al operador f se le conoce como ***ley de composición interna***

VIII. Ley de Composición Externa por la Derecha

Es externa por la derecha si a cada par ordenado (a, b) de $A \times B$ (donde A y B con conjuntos distintos) le asigna un elemento c que pertenece al conjunto A, cumpliéndose que ese elemento asignado al par ordenado (tal elemento pertenece a la operación $A \times B$) es único y a su vez es resultado de operar los elementos del par ordenado.

Formalmente se expresa como:

Dados dos conjuntos A y B, así como una operación $:\cdot$, representado como la $3-$ *tupla* horizontal $(A, B, \cdot)$:

$$\cdot : A \times B \longrightarrow A$$

$$(a, b) \longmapsto c = a \cdot b$$

para la que se define una función que asigna un elemento c que pertenece a A a cada par ordenado (a, b) resultante de la operación $A \times B$, es decir:

$$\forall (a, b) \in A \times B, \qquad \exists!\, c \in A: c = a \cdot b$$

IX. Ley de Composición Externa por la Izquierda

Es externa por la derecha si a cada par ordenado (a, b) de $A \times B$ (donde A y B con conjuntos distintos) le asigna un elemento c que pertenece al conjunto B, cumpliéndose que ese elemento asignado al par ordenado (tal elemento pertenece a la operación $A \times B$) es único y a su vez es resultado de operar los elementos del par ordenado.

Formalmente se expresa como:

Dados dos conjuntos A y B, así como una operación $:\circ$, representado como la $3 - tupla$ horizontal $(A, B, \circ)$:

$$\circ : A \times B \longrightarrow A$$

$$(a, b) \longmapsto c = a \circ b$$

para la que se define una función que asigna un elemento c que pertenece a A a cada par ordenado (a, b) resultante de la operación $A \times B$, es decir:

$$\forall (a, b) \in A \times B, \qquad \exists!\, c \in A : c = a \circ b$$

Como puede observarse, estudiando estos conceptos más a profundidad, una *función* puede ser una ley de composición interna o externa, dependiendo de la relación que establezca a través del operador entre los operandos y del valor único asignado a dicha operación y según las funciones definidas entre determinados conjuntos y sus correspondientes elementos, se obtendrán diversas estructuras algebraicas.

A nivel de estructuras algebraicas, la más usual en la investigación científica es la de los espacios euclidianos $n - dimensionales$ y la de los espacios de Hilbert, que como se verifica en (Kolmogórov & Fomin, Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional, 1978, pág. 165), un espacio de Hilbert es un espacio euclidiano separable, completo y de dimensión infinita

X. Grupo Abeliano

Un grupo $(\boldsymbol{S}, *)$ ***es un conjunto*** $\boldsymbol{S}$ ***bajo una operación binaria*** $*: \boldsymbol{S} \times \boldsymbol{S} \rightarrow \boldsymbol{S}$. De manera intuitiva, un grupo es un conjunto finito o infinito de elementos equipado con una operación binaria (llamada *operación de grupo*) que posee las propiedades de clausura, asociatividad, la propiedad de identidad [la operación contempla al elemento neutro (para el caso de la adición es el 0, para el caso de la multiplicación es el 1)] y la propiedad de poseer elemento inverso [(como señala (Wikipedia, 2021), ***la intuición de "elemento inverso" es la de un elemento que puede 'deshacer' el efecto de combinación con otro elemento dado. Si bien la definición precisa de un elemento inverso varía según la estructura algebraica involucrada, estas definiciones coinciden en un grupo*** -*i.e.*, para los diferentes tipos de grupos existentes en la teoría matemática[2]-)]. Por ejemplo, la distancia entre dos puntos en $\mathbb{R}^2$ definida como una función $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se interpreta como que el producto cartesiano de los puntos en el plano (tanto en el eje x como en el eje y) da como resultado la distancia entre estos puntos, definida como un escalar. Además, entre los diferentes tipos de grupos destacan, para fines de la teoría de las probabilidades, los grupos abelianos. Un grupo abeliano es un grupo en el cual el orden de las operaciones no importa, es decir, que cumple con la ley conmutativa.

XI. Anillo

Un anillo es un conjunto bajo dos operaciones binarias, comúnmente interpretadas como la adición y la multiplicación, como se verifica en (Weisstein, Ring, 2021). Un anillo bajo adición es un grupo abeliano, por ejemplo, los números enteros. Un anillo conmutativo es aquel en el que sus miembros satisfacen la ley conmutativa. Un anillo de conjuntos es un $\sigma - Álgebra\ \mathbb{S}$.

Señalan (Kolmogórov & Fomin, Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional, 1978, pág. 43) que "Se llama *sistema de conjuntos* a todo conjunto cuyos elementos son, en sí, ciertos conjuntos. Si no se especifica lo contrario,

[2] Como se establece en la sección sobre conceptos del álgebra abstracta, definir el inverso de esta forma ofrece ciertas ventajas no triviales.

estudiaremos sistemas cuyos elementos son cada uno un subconjunto de cierto conjunto fijado X. Denotaremos los sistemas de conjuntos con letras góticas mayúsculas. Serán de interés principal para nosotros aquellos sistemas de conjuntos que 3resultan cerrados respecto a las operaciones introducidas (…)", en las cuales evidentemente hace referencia a unión, intersección, diferencia y complemento.

Como se verifica en (Kolmogórov & Fomin, Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional, 1978, pág. 43), un sistema no vacío de conjuntos $\mathfrak{R}$ se llama *anillo* si de $A \in \mathfrak{R}$ y $B \in \mathfrak{R}$ se deduce $A \triangle B \in \mathfrak{R}$ y $A \cap B \in \mathfrak{R}$. Puesto que para cualesquiera dos conjuntos A y B se tiene que $A \cup B = (A \triangle B) \triangle (A \cap B)$ y $A \setminus B = A \triangle (A \cap B)$, resulta que si $A \in \mathfrak{R}$ y $B \in \mathfrak{R}$, también pertenecen a $\mathfrak{R}$ los conjuntos $A \cup B$ y $A \setminus B$. Consecuentemente, un anillo de conjuntos es un sistema de conjuntos invariante respecto a las operaciones de unión e intersección, y de resta y diferencia simétrica (denotada mediante el operador $\triangle$, concepto que es explicado en esta investigación) explicada en esta investigación.

XII. Semianillo

Como señalan (Kolmogórov & Fomin, Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional, 1978, pág. 45), un sistema de conjuntos $\mathfrak{G}$ se llama *semianillo* si contiene el conjunto vacío $\emptyset$, está cerrado respecto a la operación de intersección y cumple con la propiedad que si A y $A_1 \subset A$ pertenecen a $\mathfrak{G}$, es posible representar representar el conjunto A en la forma $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$.

XIII. Campo

Sintéticamente, "Un cuerpo es un conjunto F (de objetos de cualquier especie), junto con dos «operaciones binarias» $+$ y $\cdot$ definidas sobre F, es decir, dos reglas que asocian a elementos de a y b de F otros elementos $a + b$ y $a \cdot b$ de F)" (Spivak, 2010, pág. 800), para el cual se cumplen las mismas propiedades de un espacio vectorial. Sin embargo, no por ello un campo es equivalente a un espacio vectorial, sin establecer determinadas condiciones. Si bien es cierto, tanto el espacio vectorial como el campo cumplen las mismas propiedades y se definen las mismas operaciones sobre estos, el espacio vectorial es un conjunto que toma elementos dentro de sí para realizar la operación de adición, pero toma elementos de otro conjunto para multiplicar los elementos contenidos dentro de sí (a estos elementos se les conoce como escalares y de ahí viene la expresión "Sea V un espacio vectorial sobre un F") y entonces se dice que el conjunto V sobre el otro conjunto F que contiene los elementos llamados escalares es un espacio vectorial sobre un cuerpo, donde los escalares son precisamente los elementos del cuerpo, es decir, "escalares" es el nombre con que se denominan a los elementos de un cuerpo al ser usados en un espacio vectorial para multiplicar a uno o más elementos de dicho espacio. De lo anterior se deduce que un cuerpo podría ser en sí mismo un espacio vectorial. Más aún, si F es un cuerpo y E es un subcuerpo de F, entonces F es un espacio vectorial sobre E, sin embargo, el subconjunto tomado del cuerpo F tendría que cumplir determinadas propiedades para que además de ser subconjunto, también sea un subcuerpo, las cuales son las mismas que para el cuerpo o campo en cuestión, como se verifica en (Weisstein, Subfield, 2021).

XIV. Semejanzas y Diferencias entre Grupo, Campo y Anillo

Con base en lo expuesto anteriormente, un anillo es un grupo con una operación adicional (el grupo se define como un sistema de conjuntos con una operación). Tal operación adicional (la adición, precisamente) es asociativa y las propiedades distributivas de ambas operaciones (usualmente definidas como la adición y el producto) permiten que las dos operaciones sean compatibles, esto último se verifica en (Stack Exchange Mathematics, 2010); estas dos operaciones son usualmente interpretadas como la adición y la multiplicación, como se verifica en (Weisstein, Ring, 2021). Así, quedan claras las diferencias y semejanzas entre grupo y anillo, por lo cual se procederá a abordar la relación entre anillo y campo.

Para comprender las diferencias y semejanzas entre anillo y campo es necesario enlistar nueve propiedades que cumplen los anillos, con base en (Weisstein, Ring, 2021), en donde las propiedades 1-5 son siempre requeridas matemáticamente, la propiedad 6 prácticamente también (los anillos no-asociativos, aunque existen, los anillos que de interés general en las Matemáticas son los anillos asociativos, por lo que virtualmente todos los libros de texto abordan los anillos de tal forma en que la propiedad 6 es requerida casi siempre) y las propiedades 7-9 son opcionales (puesto que su cumplimiento o no genera anillos con características especiales):

1. La adición es asociativa, *i.e.*, para todo $a, b, c \in S, (a + b) + c = a + (b + c)$.
2. La adición es conmutativa, *i.e.*, para todo $a, b \in S, a + b = b + a$.
3. Existe elemento neutro aditivo, *i.e.*, existe un elemento $0 \in S$ tal que para todo $a \in S$, $0 + a = a + 0 = 0$. Es decir, existe "el cero" en cualquiera de sus formas concretas posibles. Esto también se puede expresar como que existe identidad aditiva, puesto que existe un elemento neutro 0 que puede utilizarse para ser adicionado a otro elemento a y como resultado obtener ese otro elemento inalterado.
4. Existe elemento inverso aditivo, *i.e.,* para todo $a \in S$ existe un $-a \in S$ tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$. Esto no es otra cosa que decir que existe un elemento que deshace la combinación algebraica expresada en a, que neutraliza a a en términos de la operación de adición, es entonces, en términos de la adición, el par dialéctico de a, es su antítesis, su contrario.
5. La ley distributiva se cumple tanto por la izquierda como por la derecha. Así, para todo $a, b, c \in S, a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$ y $(b + c) * a = (b * a) + (c * a)$.
6. La multiplicación es asociativa, *i.e.*, para todo $a, b, c \in S, (a * b) * c = a * (b * c)$. Un anillo que satisface esta propiedad a menudo se llama *anillo asociativo*.
7. La multiplicación es conmutativa, *i.e.*, para todo $a, b \in S, a * b = b * a$. Un anillo que satisface esta propiedad se conoce usualmente como *anillo conmutativo*. Como detalle importante, meramente a nivel de grupos, aquel grupo para el cual se cumple rigurosamente en su interior la ley

conmutativa. Es decir, un anillo conmutativo es un grupo abeliano que satisface determinadas condiciones adicionales antes explicadas.

8. Existe elemento neutro multiplicativo, *i.e.*, existe un elemento $1 \in S$ tal que para todo $a \neq 0 \in S, 1 * a = a * 1 = a$. Un anillo que satisface esta propiedad es conoce como *anillo unidad*, a veces llamado *anillo con identidad*, en referencia a que el resultado de multiplicar un elemento a por el elemento 1 es siempre igual al elemento a, por lo que el símbolo 1 es entonces el elemento neutro respecto de la multiplicación, conocido también como elemento identidad (porque multiplicar cualquier elemento por es neutral respecto a determinada combinación algebraica).
9. Existe elemento inverso multiplicativo, *i.e.*, para todo $a \neq 0$ en S, existe un elemento $a^{-1} \in S$ tal que para todo $a \neq 0 \in S, a * a^{-1} = a^{-1} * a = 1$, en donde 1 es el elemento identidad.

Precisamente cuando un anillo posee las propiedades 6-9 es que además de ser un anillo es también un *campo* o *cuerpo* F. Adicionalmente, un anillo que únicamente satisface las propiedades 6, 8 y 9 es conocido como *álgebra de división* o como *campo sesgado* (del inglés “skew field”). En concreto, un álgebra de división o campo sesgado es un anillo en el cual todo elemento no neutro posee inverso multiplicativo, pero la multiplicación no es necesariamente conmutativa, como se verifica en (Weisstein, Division Algebra, 2021). Debido justamente a ello, definir un inverso algebraico desde la óptica de las estructuras algebraicas definidas como *grupos*, ofrece un alto nivel de generalidad, puesto que esa definición aplica para grupos, anillos y campos. Lo anterior obedece a que, como se expuso anteriormente, cumpliendo los grupos y los anillos determinadas condiciones adicionales según sea el caso, es posible afirmar que en el contexto así definido todo anillo es un grupo y todo campo es un anillo.

XV. Clasificación de las Estructuras Algebraicas Salvo Isomorfismos

Así, se observa que la definición matemática de un inverso algebraico únicamente se va generalizando a medida que las estructuras matemáticas dentro de las que se investiga los objetos matemáticos (que expresan siempre, al menos esencialmente, determinados fenómenos naturales y sociales) se sofistican y, por tanto, es posible comprender la evolución histórica de las estructuras algebraicas estudiando la evolución histórica del concepto de "elemento inverso" dentro de dichas estructuras. Este proceso de sofisticación, partiendo del álgebra escalar descubierta por Al-Juarismi en que el inverso (aditivo o multiplicativo) no está explícito teóricamente (simplemente aparece al operar, sin que se le preste atención) fue avanzando de forma imperturbable a lo largo de la historia hasta que llegó a la época de Leibniz. Según (Timmermans, 2012, pág. 2), la noción general de isomorfismo fue percibida por primera vez por Leibniz a través de la idea de semejanza: "Precisando el 'acuerdo' [entre las diferentes ramas de las matemáticas] del que habla Descartes, [Leibniz] vislumbra, de hecho, por primera vez, la noción general de isomorfismo (que él llama "similitud") y la posibilidad de "identificar" relaciones u operaciones que son isomorfas; da como ejemplos la suma y la multiplicación. Pero estas audaces visiones quedaron sin eco entre sus contemporáneos, y hay que esperar la expansión del Álgebra que tiene lugar a mediados del siglo XIX para ver los inicios de la realización de los sueños leibnizianos."

Posteriormente a Leibniz, el concepto de "elemento inverso" continuó evolucionando a través del tiempo hasta llegar al siglo XIX. Fue en esta época, específicamente en 1819 [como se verifica en (Wikipedia, 2020) y en (Online Etymology Dictionary, 2021)], en que el químico alemán llamado Eilhard Mitscherlich descubrió que "(…) los cristales alotrópicos, cuando se calientan, se expanden de manera desigual en la dirección de ejes diferentes. Mitscherlich realizó análisis de fosfatos y fosfitos, arseniatos y arsenitos. Obtuvo ácido selénico en 1827 y demostró que sus sales son isomorfas con los sulfatos, mientras que unos años más tarde demostró que lo mismo ocurre con los manganatos y sulfatos, y con los permanganatos y percloratos.” (World of Chemicals, 2021), usando así la palabra “isomorfismo” en clara referencia clara a cosas que tenían la misma forma, cuya etimología se descompone en la palabra griega *isos* que significa "igual, idéntico" y de la palabra *morphe* que significa "forma, apariencia", que es una palabra cuyos orígenes etimológicos no se conocen, como se señala en (Online Etymology Dictionary, 2021), sólo es conocido su significado. Unos pocos años después, aparecería en 1822 la investigación de Jöns Jacob Berzelius (uno de los padres de la química moderna y el padre de la química sueca) titulada “The Use of the Blowpipe in Chemical Analysis” y traducida por John George Children (químico, minerólogo y zoólogo británico), la cual verifica que fue Mitscherlich quien descubrió los isomorfismos. Al respecto, señala Berzelius que “Este es otro ejemplo de la misma forma cristalina que se extiende a combinaciones tan diferentes, que su identidad de figura no puede justificar que las consideremos como sustancias pertenecientes a la misma especie; Sin embargo, en esto, como en el caso del anfíbol, el piroxeno y la epidota, veremos todas nuestras dificultades satisfactoriamente eliminadas por el descubrimiento de Mitscherlich del isomorfismo (*l'isomorphisme*) de ciertas bases y la propiedad de las combinaciones isomorfas de cristalizar simultáneamente, sin ser confinado a proporciones fijas. Ya he dicho que los protóxidos de hierro y manganeso forman una misma clase de bases isomorfas con la cal y la magnesia.” (Berzelius, 1822, pág. 279).

Posteriormente, como se señala en (Wikipedia, 2021), fue (Hamilton, 1856, pág. 446) quien descubrió empíricamente una variedad (la palabra “variedad” aquí no se emplea en su sentido matemático, sino en su sentido coloquial) de isomorfismo actualmente conocida como automorfismo (un isomorfismo de una estructura hacia sí misma) y fue en manos de Poincaré en 1895, como señala (Enclyclopedia of Mathematics, 2014), que se acuñó el concepto de *homeomorfismo* (de naturaleza topológica), conocido también en la actualidad como *isomorfismo topológico*, estudiados ampliamente en la sección de esta investigación correspondiente a la topología; sin embargo, el significado más general y último, *i.e.*, la esencia filosófica del concepto de "elemento inverso" no se haría presente en el siglo XIX. Es de importancia vital destacar que mientras el concepto de isomorfismo (que es la máxima generalización del concepto de "elemento inverso") evolucionaba imperturbable, simultáneamente también se colaba en cada hendija y recoveco de las Matemáticas, como se demostrará más adelante. El concepto de "elemento inverso" avanzó así hasta el siglo XX, puesto que "En el siglo XX se ha precisado en matemáticas la noción intuitiva de estructura, siguiendo la concepción de Aristóteles de la materia y la forma, según la cual cada estructura es un conjunto X dotado de ciertas operaciones (como la suma o el producto) o de ciertas relaciones (como una ordenación) o ciertos subconjuntos (como en el caso de la topología), etc. En este caso, el conjunto X es la materia y las operaciones, relaciones, etc., en él definidas, son la forma. El descubrimiento de Platón de que la forma es lo que importa se recoge en matemáticas con el concepto de isomorfismo. Una aplicación $f: X \to Y$ entre dos conjuntos dotados del mismo tipo de estructura es un isomorfismo cuando cada elemento de Y proviene de un único elemento de X y f transforma las operaciones, relaciones, etc., que hay en X en las que hay en Y. Cuando entre dos estructuras hay un isomorfismo, ambas son indistinguibles, tienen las mismas propiedades, y cualquier enunciado es simultáneamente cierto o falso. Por eso en matemáticas las estructuras deben clasificarse salvo isomorfismos." (Wikipedia, 2020). Ahora bien, ¿por qué no cambia la forma a pesar de operarse transformaciones en la materia?, debe recordarse aquí que en su sentido más general no se trata de la forma geométrica (métrica) sino de la forma topológica, que en este contexto de estudio es la esencia del objeto geométrico, mientras que su forma geométrica es su forma. En este sentido, la respuesta a la pregunta anterior se adelanta en la sección correspondiente al análisis histórico-teórico de la Topología (cuando se explica que la esencia de un fenómeno natural o social es equivalente epistemológicamente al conjunto de las propiedades topológicas de un objeto geométrico). La visión en esta investigación planteada respecto a los isomorfismos no sólo está respaldada por la escuela de filosofía soviética de mediados del siglo pasado (condensada en el diccionario filosófico des-estalinizado publicado en 1965 y que aquí se cita la versión editada por Ediciones Tecolut en 1971), sino también por la visión epistemológica del biólogo y filósofo austríaco Ludwig von Bertalanffy, quien en la investigación en la cual fundó la ahora ampliamente conocida teoría de sistemas (un estudio interdisciplinario de los sistemas) afirma que “Hay, con todo, una razón más del isomorfismo de leyes en diferentes dominios, que tiene importancia para lo que decimos (…) El isomorfismo hallado entre diferentes terrenos se funda en la existencia de principios generales de sistemas, de una <<teoría general de los sistemas>> más o menos bien desarrollada” (Bertalanffy, 1989, pág. 86).

Así, el concepto de “elemento inverso” continuó su evolución histórica y llegó a 1947, fecha para la cual se había hecho omnipresente en todas las Matemáticas, desarrollándose a la par del desarrollo de esta. Por este hecho, llegó a declarar el célebre lógico-matemático, físico teórico y filósofo Hermann Klauss Hugo Weyl. Al respecto, Weyl señaló de forma general que los isomórficos eran “aquellos dominios que poseen la misma estructura” y señaló además que “Una transformación que conserva la estructura del espacio [...] es llamada automorfismo por los matemáticos. Leibniz reconoció que esta es la idea subyacente al concepto geométrico de similitud. Un automorfismo lleva una figura a una que, en palabras de Leibniz, es "indiscernible de ella si cada una de las dos figuras se considera por sí misma", como recoge (Timmermans, 2012, pág. 2).

Posteriormente, el célebre colectivo de matemáticos franceses conocido como *Bourbaki*[3] planteó en 1957 que “Pero es sólo con la noción moderna de estructura que finalmente se reconoció que ***toda estructura lleva consigo una noción de***

[3] Para más información, véase https://en.wikipedia.org/wiki/Nicolas_Bourbaki.

isomorfismo, y que no es necesario dar una definición especial de ella para cada tipo de estructura.", lo que es citado por (Timmermans, 2012, pág. 2).

El concepto continuó su tránsito evolutivo en el tiempo hasta que, en 1965, en el diccionario filosófico antes mencionado, en que aparece por vez primera la definición filosófica de un isomorfismo, así como también su conexión explícita con un concepto fundamental del marxismo, el concepto de *base* o *estructura*. Ahí, se define estructura como "(del latín "structura": estructura). Conexión y relación recíproca, estables, sujetas a ley, entre las partes y elementos de un todo, de un sistema. En matemática y en lógica matemática, la definición exacta del concepto de estructura se formula recurriendo al concepto de isomorfismo. La categoría de estructura se halla estrechamente vinculada a las categorías –que le son afines– de ley, forma, necesidad, &c. Permanece invariable a pesar del cambio constante de las partes y del todo mismo, sólo se transforma cuando en el todo se produce un salto cualitativo. Por otra parte, los elementos del todo, sin excepción, dependen de manera esencial de su estructura, desempeñan un papel cualitativamente distinto en dependencia del modo y del sistema de sus nexos y de su organización. Así, el grafito y el diamante se distinguen precisamente por la diferente disposición y por el distinto orden de los átomos del carbono. En la actualidad, ha aumentado en gran medida la importancia del concepto de "estructura" en la ciencia, dado que tanto la matemática como la física y la biología se han encontrado con el hecho de la totalidad orgánica de sus objetos. En particular, se emplea el procedimiento de investigar la estructura del objeto antes de estudiar los elementos y partes que lo componen. Se ha aclarado que en cualquier todo orgánico es posible distinguir tres tipos de estructura dialécticamente concatenados y dialécticamente cognoscibles. El primer paso de la cognición consiste en delimitar la estructura mecánica del todo, dividir el todo en "partes". El descubrimiento de que "la parte es igual al todo" (Hegel) y constituye la fuente del todo, señala el hecho mismo de la totalidad orgánica. El conocimiento cabal de un todo significa conocer la estructura orgánica como realización de toda la riqueza de relaciones entre las partes del todo. Ello ha hecho que haya crecido sensiblemente el significado de la investigación de los aspectos gnoseológicos del concepto de "estructura", el cual ocupa un lugar específico en lingüística (el denominado estructuralismo, investigación del lenguaje como sistema de signos) y en psicología (idea de totalidad o carácter estructural de la psique, idea característica, ante todo, de la Gestaltpsychologie)." (Rosental & Iudin, 1971, págs. 158-159)[4], mientras que definen isomorfismo como "(del griego ἴσος: igual, y μορφή: forma). Relación entre objetos que tienen una estructura igual, idéntica. Dos estructuras (sistemas o conjuntos) son isomorfas entre sí cuando a cada elemento de la primera estructura corresponde sólo un elemento de la segunda, y a cada operación (nexo) de una estructura corresponde una única operación (nexo) en la otra, y recíprocamente. Por lo general, la relación isomórfica caracteriza una de las relaciones o propiedades de los objetos que se comparan. Sólo puede darse el isomorfismo completo entre dos objetos abstractos, por ejemplo, entre una figura geométrica y su expresión analítica bajo el aspecto de

[4] Para la versión de 1984, la definición de estructura evolucionó y se planteó de la siguiente forma: "(latín structura.) Forma interior de organización del sistema, que constituye una unidad de conexiones estables entre sus elementos, así como de las leyes que rigen estas conexiones. La estructura es atributo inalienable de todos los objetos y sistemas realmente existentes. En el mundo no puede haber cuerpos sin estructura, con capacidad de cambios internos. Cada objeto material posee una multiplicidad inagotable de conexiones interiores y exteriores y la capacidad de pasar de unos estados a otros. Gracias a la diversidad de los niveles estructurales de la materia, cada sistema material es poliestructural. Por ejemplo, en la sociedad existen las estructuras económicas, políticas, socio-clasistas y otras. En dependencia del nivel logrado de conocimiento o de los fines de la investigación que se plantea la teoría puede ser sometido a estudio uno u otro componente de la estructura. La estructura del sistema es más estable que sus propiedades por separado, pero la estructura no es un aspecto inmutable del sistema. Cuando los cambios cuantitativos del sistema rebasan el marco de la medida y provocan cambios cualitativos, estos últimos siempre aparecen como cambios de la estructura del sistema. La conexión entre los elementos de la estructura se subordina a la dialéctica de la interrelación de la parte y el todo. Al mismo tiempo, los cambios estructurales en el sistema originan los cambios de las propiedades de los elementos que obedecen a las leyes generales del desarrollo del sistema como un todo. En la teoría científica, la transición de los fenómenos a la esencia coincide con el conocimiento de la estructura de los sistemas y procesos en estudio y con el paso de unos niveles estructurales a otros, más profundos. En virtud de ello, en la ciencia y la técnica modernas se han desarrollado en medida considerable las investigaciones sistémico-estructurales, así como los métodos que les corresponden. La filosofía materialista dialéctica estudia las leyes más generales, universales, de la organización estructural y desarrollo de todos los sistemas materiales, así como esclarece las relaciones entre el método sistémico-estructural y otros métodos concretos del conocimiento científico." (Frolov, 1984, pág. 152).

fórmula matemática. El concepto de "isomorfismo" se emplea mucho en matemática y también en lógica matemática, en física teórica, en cibernética y otras esferas del saber. El concepto de "isomorfismo" se halla relacionado con los conceptos de "modelo" (Modelación), "señal" e "imagen" (Reflejo, Ideal)." (Rosental & Iudin, 1971, pág. 249)[5].

Finalmente, lo que los filósofos soviéticos reflexionaron sería reafirmado independientemente por Bertalanffy en 1968, al afirmar que "Hay, con todo, una razón más del isomorfismo de leyes en diferentes dominios, que tiene importancia para lo que decimos (…) El isomorfismo hallado entre diferentes terrenos se funda en la existencia de principios generales de sistemas, de una <<teoría general de los sistemas>> más o menos bien desarrollada" (Bertalanffy, 1989, pág. 86).

XVI. Conjunto Potencia

Un conjunto potencia de un conjunto S es el conjunto de todos los posibles subconjuntos de S. Se denota como 2^S. Si hay n elementos en el conjunto S, entonces $|2^S| = 2^n$[6].

---

[5] Para la versión de 1984, la definición de estructura evolucionó y se planteó de la siguiente forma: "(gr. isos: igual; homoios: semejante, y morphe: forma.) Conceptos que caracterizan la correspondencia entre las estructuras de los objetos. Dos sistemas considerados al margen de la naturaleza de los elementos que los constituyen, son isomórficos en caso de que a cada elemento del primer sistema le corresponda sólo un elemento del segundo, y a cada operación (conexión) en un sistema le corresponda una operación (conexión) en el otro, y viceversa. Tal correspondencia univalente se llama isomorfismo. El isomorfismo completo puede existir sólo entre los objetos abstractos, idealizados, por ejemplo, la correspondencia entre una figura geométrica y su expresión analítica en la fórmula. El isomorfismo no está asociado con todas las propiedades y relaciones de los objetos confrontables, sino tan sólo con algunas de ellas, fijadas en el acto cognoscitivo; estos objetos pueden diferenciarse en otras relaciones y propiedades suyas. La sintetización del isomorfismo es el concepto de homomorfismo, cuando la correspondencia es univalente tan sólo en una dirección. Por eso, la imagen homomórfica es un reflejo incompleto y aproximado de la estructura del original. Tal es, por ejemplo, la relación entre el mapa y el terreno, entre la grabación y su original, es decir, las oscilaciones acústicas del medio aéreo. Los conceptos de "isomorfismo" y de "homomorfismo" se utilizan ampliamente en la lógica matemática y la cibernética, la física, la química y otras esferas del saber. En la teoría del conocimiento, estos conceptos se emplean exitosamente en el estudio de la analogía (correspondencia) entre la imagen y el objeto, entre la teoría y el objeto, en el estudio de la transformación de la información. El isomorfismo y el homomorfismo están vinculados estrechamente con los conceptos "modelo" (Modelado), "señal" e "imagen" (Reflejo, Lo ideal)." (Frolov, 1984, pág. 237).

[6] El orden de 2^S es 2^n.

Un conjunto potencia forma un grupo abeliano cuando se considera con la operación de diferencia simétrica[7] y forma un anillo conmutativo cuando se considera con la operación de diferencia simétrica y de intersección.

XVII. Orden Parcial, Maximal y $\boldsymbol{\sigma - \text{Á}lgebra}$ o Álgebra de Borel

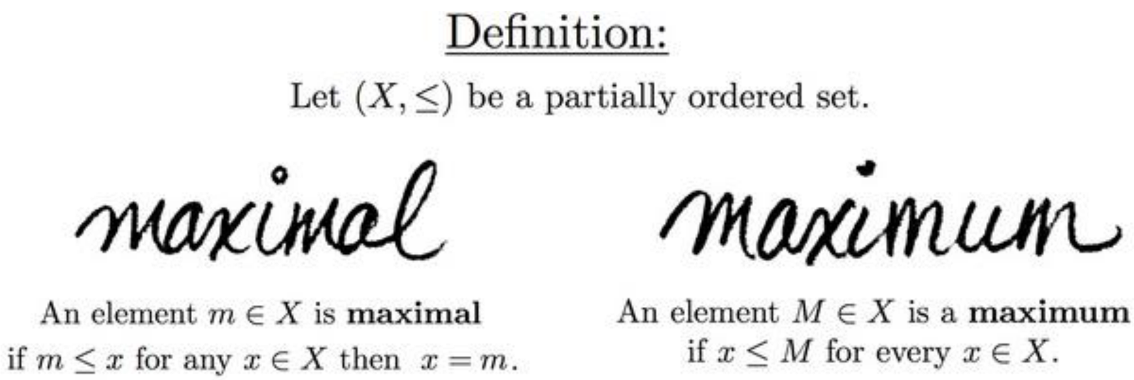
Sintéticamente hablando, un $\sigma - \text{Á}lgebra$ es una colección de subconjuntos del conjunto S que es numerable cerrado bajo las operaciones de suma, multiplicación, producto por escalar, división y sustracción, es decir, que bajo estas operaciones el complemento de un subconjunto, la unión o intersección de sus subconjuntos numerables son también subconjuntos numerables del conjunto S.

Como señalan (Kolmogórov & Fomin, Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional, 1978, págs. 48-49), en varios problemas, particularmente en los vinculados a la teoría de la medida, es preciso considerar la unión e intersección de una cantidad numerable, y no sólo finita, de conjuntos. Por eso conviene construir el concepto de $\sigma - \text{Á}lgebra$ desde la definición de anillo de un conjunto mediante los siguientes pasos.

En primer lugar, es necesario definir lo que es el orden parcial de un conjunto. Entiéndase por *orden parcial* de un conjunto como aquel que define la existencia de alguna relación de orden $\geq, =, \leq, >, <$. Como se señala en (Weisstein, Maximal Element, 2021), sea $(A, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado, entonces un elemento $m \in A$ se dice *maximal* si, para todo $a \in A$, $m \nleq a$. Alternativamente, cuando un elemento m que pertenece a un conjunto A (*i.e.*, $m \in A$) es maximal se cumple que si $m \leq a$ para todo $a \in A$, entonces $m = a$. Este concepto se generaliza al concepto de conjunto maximal. Como se señala en (Karagila, 2014), si se considera la colección parcialmente ordenada $A = \{X \mid X\ tiene\ la\ propiedad\ P\}$ y si se considera a "$\leq$" como el operador de inclusión de conjuntos, entonces el *conjunto maximal* con la propiedad P es el elemento maximal de la colección

[7] La unión menos la intersección de los conjuntos.

parcialmente ordenada antes descrita (el maximal no necesariamente existe); para evitar equívocos, un conjunto maximal no es equivalente necesariamente a un conjunto máximo, puesto que un conjunto máximo es el elemento máximo del orden parcial (y tampoco necesariamente existe) y de ello se desprende, evidentemente, que los conceptos "maximal" y "máximo" (este último con el que se suele estar más familiarizado de los cursos de Cálculo Diferencial e Integral a nivel académico de grado) son de naturaleza teórica diferente y en la práctica científico-matemática no necesariamente serán iguales. A continuación, una imagen que resume las ideas expuestas anteriormente.



Fuente: (Bradley, 2015).

Así, como señala Bradley[8], un elemento es máximo si es más grande que todos los demás elementos del conjunto, mientras que un elemento es maximal si no es más pequeño que cualquier otro elemento del conjunto (donde "más pequeño" está determinado por el orden parcial "≤"). Sí, es cierto que el máximo también satisface esta propiedad (si un conjunto tiene un máximo, este debe ser único, por lo tanto, se habla de "EL máximo"), es decir, cada elemento máximo es también maximal, sin embargo, a la inversa no es cierto: si un elemento es maximal, no necesariamente será el máximo. Para comprender mejor lo anterior la clave reside en la definición de conjunto parcialmente ordenado. Debe recordarse que

[8] Todas las intuciones expuestas en este párrafo son tomadas de la fuente citada y su concepción corresponde a Tai-Danae Bradley, PhD. en Matemáticas e investigadora posdoctoral (en *X, the Moonshot Factory* que anteriormente se llamó Google X).

básicamente “parcialmente ordenado” solo significa que tiene sentido usar las palabras "más grande" o "más pequeño"; tenemos una forma de comparar elementos. ***Un conjunto es totalmente ordenado cuando absolutamente todos sus elementos son comparables entre sí; esto contraste con un conjunto parcialmente ordenado, en el cual únicamente algunos elementos son comparables entre sí, no necesariamente todos***. Esto significa que es posible tener un elemento que sea maximal, pero que no sea el máximo porque no se puede comparar con algunos elementos (y este hecho es el más importante en la distinción). ***No es demasiado difícil ver que cuando un conjunto está totalmente ordenado está asegurado que maximal y máximo serán equivalentes***[9].

Finalmente, es necesario destacar que, como señala (Weisstein, Well Ordered Set, 2021), ***al analizar conjuntos finitos, un conjunto totalmente ordenado es equivalente a un conjunto bien ordenado*** (se localiza en la literatura en inglés como “well-ordered set”); ***sin embargo, para conjuntos infinitos un conjunto A se dice bien ordenado si y solo si además de ser totalmente ordenado cumple la condición de que todo conjunto no vacío tiene un elemento mínimo*** (un elemento más pequeño que cualquier otro elemento -esto significa en términos aplicados si es posible determinar unívocamente el elemento más pequeño de una colección de objetos-), concepto que se expresa en inglés como “has a least element”.

---

[9] Es importante resaltar que sobre los conjuntos totalmente ordenados se puede construir una topología de orden. Como se señala en (Wikipedia, 2020), una topología de orden es cierta topología que puede ser definida sobre cualquier conjunto totalmente ordenado, puesto que la topología de orden es la generalización natural del concepto de topología de los números reales a conjuntos totalmente ordenados arbitrarios. Si esto es así, un campo probabilístico (que es un espacio de medida cuya medida es 1), construido con base en la recta real, debe ser entonces además un espacio euclidiano (específicamente, un subespacio del mismo). Tomando lo anterior como verdadero, un campo probabilístico por definición debe ser un conjunto completamente ordenado, puesto que su construcción se basa en la recta real y de la topología de los reales se desprende el concepto de topología de orden (que es una extensión de sí a cualquier conjunto completamente ordenado). Al ser un conjunto completamente ordenado, existe por definición un elemento mínimo; el concepto de elemento mínimo no debe confundirse con el de elemento minimal, pues el elemento mínimo es aquel elemento que es más pequeño que todos lo demás, mientras que un elemento minimal es aquel elemento que no tiene nada más pequeño que él dentro del conjunto analizado.

En segundo lugar, se debe partir de lo expuesto en (Kolmogórov & Fomin, Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional, 1978, págs. 43-44). ***Un conjunto $\boldsymbol{E}$ se llama unidad del sistema de conjuntos $\mathfrak{G}$ si pertenece a $\mathfrak{G}$ y si, además, para todo $\boldsymbol{A} \in \mathfrak{G}$ se verifica la igualdad $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}$***. De manera que la unidad de un sistema de conjuntos $\mathfrak{G}$ no es otra cosa que el conjunto maximal (en el sentido antes definido) de este sistema que contiene todos los demás conjuntos que figuran en $\mathfrak{G}$. Así, ***un anillo de conjuntos provisto de la unidad se denomina álgebra de conjuntos***.

Según lo expuesto en (Kolmogórov & Fomin, Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional, 1978, pág. 48), un anillo de conjuntos se llama $\sigma - anillo$ si junto con toda sucesión de conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ contiene la unión

$$S = \bigcup_n A_n$$

En el mismo lugar se establece que un anillo de conjuntos se llama $\delta - anillo$ si junto con toda sucesión de conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ contiene la intersección

$$D = \bigcap_n A_n$$

Los dos conceptos anteriores denotan un conjunto cerrado bajo las operaciones de unión e intersección. Así, "***Es natural llamar $\boldsymbol{\sigma} -$ á$\boldsymbol{lgebra}$ a todo $\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{anillo}$ con unidad y $\boldsymbol{\delta} -$ á$\boldsymbol{lgebra}$ a todo llama $\boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{anillo}$ con unidad. Es fácil ver, sin embargo, que estos dos conceptos coinciden: toda llama $\boldsymbol{\sigma} -$ á$\boldsymbol{lgebra}$ es al mismo tiempo una $\boldsymbol{\delta} -$ á$\boldsymbol{lgebra}$ y toda $\boldsymbol{\delta} -$ á$\boldsymbol{lgebra}$ es una $\boldsymbol{\sigma} -$ á$\boldsymbol{lgebra}$***." (Kolmogórov & Fomin, Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional, 1978, pág. 48)[10]. La equivalencia anterior no solo es resultado natural de la propia definición

[10] La naturalidad a la que hace referencia Kolmogórov parecería estar vinculada a que un álgebra (aunque tiene diferentes significados según el contexto) es aquí un tipo particular de estructura algebraica, la que formalmente se define como un espacio vectorial V sobre un campo F con multiplicación, como se verifica en (Weisstein, Algebra, 2021). Como todo sigma-álgebra incluye al conjunto vacío (que en términos más familiares se conoce como "0"), si además incluye al conjunto

teórica, sino también al *principio de dualidad*, el cual consiste en que de cualquier teorema referente a un sistema de subconjuntos de un conjunto fijo S se puede deducir de *manera automática* otro teorema, el teorema dual, sustituyendo los conjuntos considerados por sus complementos, la suma de conjuntos por su intersección y la intersección por la suma, como se señala en (Kolmogórov & Fomin, Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional, 1978, pág. 16)[11].

Así, "***Las*** $\boldsymbol{\delta -}$ ***álgebra o, lo que es lo mismo, las*** $\boldsymbol{\sigma -}$ ***álgebra suelen llamarse álgebras de Borel o, simplemente,*** $\boldsymbol{B -}$ ***álgebras***." (Kolmogórov & Fomin, Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional, 1978, pág. 48). Sobre estos objetos matemáticos es conveniente realizar algunas especificaciones técnicas, con base en (Kolmogórov & Fomin, Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional, 1978, págs. 48-49). Ello obedece a que los álgebras de Borel desempeñan un papel fundamental en la construcción axiomática de la teoría de las probabilidades y, como es ampliamente conocido, el autor principal del libro (el matemático soviético Andrei Kolmogórov) es también el padre de la teoría axiomática de las probabilidades, por lo que será posible obtener de primera mano la lógica constructiva (recuérdese que Kolmogórov era un matemático constructivista[12]) con la que se construye la álgebra de Borel con la que a su vez se

---

unidad [el "1" de estas operaciones algebraicas, que al combinarse mediante intersecciones, no altera al conjunto con el conjunto con el que se interseca; lo que, como puede observarse, significa que, así como el conjunto unidad es el análogo del "1" en el álgebra escalar (el álgebra de la escuela), las intersecciones en el contexto de la teoría de conjuntos son análogas a la multiplicación en el contexto del álgebra escalar, con las distancias formales-conceptuales pertinentes], entonces es posible construir el conjunto de los números reales, aquellos con los que seguramente el lector está familiarizado (y la mayor parte de la población mundial) y que pueden ser construidos mediante la utilización únicamente de 0's y 1's

[11] Aplicando el principio de dualidad en la forma antes explicada, $\bigcup_n A_n = E \setminus \bigcup_n (E \setminus A_n)$ y $\bigcap_n A_n = E \setminus \bigcup_n (E \setminus A_n)$, por lo que $\bigcup_n A_n = \bigcap_n A_n$.

[12] Con conocimiento de causa de lo polémico que puede ser la afirmación anterior en una sociedad de clases capitalista, simplemente debe referirse el lector a (Eremenko, 2020). Ahí se encontrará que la visión filosófica de Kolmogórov era dialéctico-materialista. De hecho, su definición de Matemáticas es la misma que Engels en *Dialéctica de la Naturaleza*, añadiendo a ella la Lógica Matemática. Emerenko cita fundamentalmente tres documentos. El primero y el segundo son las versiones en ruso (http://www.mathnet.ru/links/8cdd5dd921cd8a51ba9423f541a3118c/ppi67.pdf)

construye el campo probabilístico de Kolmogórov[13] (un espacio de medida en donde la medida de todo el espacio es l).

---

y en inglés (https://link.springer.com/article/10.1134/S0032946006040107) de la investigación de Kolmogórov cuyo título traducido al español es *Controversias Contemporáneas Sobre la Naturaleza de las Matemáticas*, respectivamente; mientras que la tercera es una investigación publicada un viernes 22 de enero de 2016 por la Universidad de Ulyanovsk en Rusia, cuya autoría corresponde a los profesores Baranets and Veryovkin, la cual puede encontrarse en el portal de la página web de la institución referida bajo la siguiente dirección: http://staff.ulsu.ru/baranetz/files/2011/06/baranec_verevkin_koncep_matemat_kolmogorova.pdf. Además, es bien conocido que Kolmogórov (por la investigación de él ya referida), aunque decantado intuicionista, rechazaba las visiones extremas del intuicionismo y del formalismo de Hilbert, que va de la mano con que en la Unión Soviética predominó de forma sumamente generalizada el Constructivismo Matemático, mucho después de que la cacería ideológica que hizo Stalin terminara, mucho después de la muerte del tirano incluso. Tanto así que hasta la fecha es la corriente filosófica que domina las Matemáticas en Rusia y sus otrora países satélites y de ello puede dar cuenta el lector si traduce las páginas de Wikipedia en ruso referentes a Filosofía de las Matemáticas, Matemáticas y Estadística (sean tópicos de Estadística Matemática o Estadística Aplicada), pero también existían fuertes raíces constructivistas antes de la cacería y mucho antes que el constructivismo se conociera como tal, y es que el lector debe recordar que la primera Escuela de Matemáticas en Rusia fue fundada por el ilustre matemático Leonhard Euler en lo que conformó la segunda etapa más productiva en el curso de sus investigaciones (la primera ocurrió en Alemania), particularmente en Moscú. Luego de ella sería nutrida por intelectuales y filósofos de la talla de Lobachevski y Chebyshov. Además, otra evidencia robusta se expresa en lo afirmado por Ríbnikov: "Darse cuenta de la inseparabilidad de lo lógico y lo histórico requiere en matemática el conocimiento de los hechos fundamentales de la historia de las matemáticas y de los trabajos clásicos, la comprensión de las leyes del desarrollo de las ciencias matemáticas y del carácter histórico de la correspondencia entre las disciplinas matemáticas particulares. Esta exigencia es provocada y apoyada además por el ejemplo de los principales científicos matemáticos. Su actividad en ramas concretas de las matemáticas, como regla, se conjuga con investigaciones de problemas históricos. En calidad de ejemplo puede citarse el artículo de A. N. Kolmogórov "Matemática" en el tomo 26 de la Gran Enciclopedia Soviética, donde el mismo objeto de las matemáticas se considera en un plano histórico." (Ríbnikov, 1974, pág. 18). El elemento de análisis anterior compete a este contexto puesto que Kolmogórov realizó su propia clasificación histórica de las matemáticas (y, dicho sea de paso, también de la teoría de las probabilidades), al igual que lo hicieron otros científicos, como por ejemplo Marx en los Manuscritos Matemático, aunque la clasificación de Marx fue más filosófica que histórica (sin dejar, por supuesto, de ser histórica). Tanto la clasificación histórica de las etapas del desarrollo de las Matemáticas, la Teoría de las Probabilidades (ambas según la clasificación histórica de Kolmogórov) y la clasificación histórica realizada por Marx son abordadas por Ríbnikov en su obra. La clasificación de Marx será de utilidad, junto con la investigación de Ríbnikov sobre el tema (la aquí citada), específicamente en la sección sobre los orígenes históricos y teóricos del Análisis Matemático; mientras que las clasificaciones de Kolmogórov sobre las etapas del desarrollo de la teoría de las probabilidades se abordará en la génesis histórica-teórica de la sección titulada "Teoría del Aprendizaje Estadístico".

[13] Como señala (Kolmogórov, FOUNDATIONS OF THE THEORY OF PROBABILITY, 1956), retomándolo a su vez de la obra de Hausdorff aquí citada (aunque de la edición alemana del año 1927, página 78), "***Un sistema de conjuntos es llamado campo si la suma, el producto y la diferencia de dos conjuntos del sistema pertenece también al mismo sistema. Todo campo no-vacío contiene el conjunto vacío 0. Utilizando la notación de Hausdorff, nosotros designamos al producto de A y B por AB; la suma por $A+B$ en el caso en el que $AB=0$; y en el caso general por***

Como señalan Kolmogórov y Fomin, el ejemplo más sencillo de una $B-álgebra$ es la totalidad de los subconjuntos de un conjunto A, el cual es un álgebra de Borel con el que existe mayor familiarización en las ciencias, pues es el álgebra de Borel que completa la terna ordenada que define un campo probabilístico, en donde dicha álgebra es construida a partir del espacio muestral (o conjunto muestral o muestra, desde la perspectiva de un científico de datos). Si se tiene un sistema de conjuntos $\mathfrak{G}$ (un conjunto en que sus elementos son conjuntos), siempre existe al menos una $B-álgebra$ que contiene este sistema. Como señalan (Kolmogórov & Fomin, Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional, 1978, págs. 48-49), supóngase que $X \bigcup_{A \in \mathfrak{G}} A$ y considérese el sistema $\mathfrak{B}$ de todos los subconjuntos del conjunto X. Está claro que $\mathfrak{B}$ es una $B-álgebra$ que contiene $\mathfrak{G}$. Si $\check{\mathfrak{B}}$ es una $B-álgebra$ arbitraria que contiene $\mathfrak{G}$ y $\check{X}$ es su unidad, todo $A \in \mathfrak{G}$ está contenido en $\check{X}$ y, por consiguiente, $X = \bigcup_{A \in \mathfrak{G}} A \subset \check{X}$. Una $B-álgebra$ $\mathfrak{B}$ se llama *irreducible* (respecto al sistema $\mathfrak{G}$) cuando $\check{X} = \bigcup_{A \in \mathfrak{G}} A$. En otras palabras, una $B-álgebra$ irreducible[14] es una $B-álgebra$ que no contiene puntos pertenecientes a

---

$A+B$; la diferencia de A y B por $A-B$. El conjunto $E-A$, el cual es el complemento de A, será denotado por $\overline{A}$. Nosotros debemos asumir que el lector está familiarizado con las reglas fundamentales de operación de conjuntos y sus sumas, productos y diferencias. Todos los conjuntos de $\mathfrak{F}$ serán designados por letras latinas mayúsculas." En esa obra de Kolmogórov $\mathfrak{F}$ es el álgebra de Borel, a diferencia de la escrita con Fomin, en la que este es denotado por $\mathfrak{G}$.

[14] El término usado aquí por Kolmogórov y Fomin es un término que para los fines que ellos lo emplean en la obra citada ha caído en desuso en la actualidad. En su lugar, el término actualmente utilizado es el de *álgebra minimal;* Como se verifica en (Weisstein, Minimal Set, 2021), este concepto se generaliza en el concepto de conjunto minimal. Dada una colección de conjuntos, un *conjunto minimal* es un conjunto miembro de la colección que no es subconjunto propio [un subconjunto propio S' de S, denotado $S' \subset S$, es aquel subconjunto que está estrictamente contenido en S y, por tanto, necesariamente excluye al menos a uno de los elementos de S. El conjunto vacío es, por tanto, un subconjunto propio de todo conjunto no vacío (puesto que por definición todo conjunto incluye el elemento neutro), como se verifica en (Weisstein, Proper Subset, 2021)] de ningún otro conjunto de la colección. Entones, un álgebra minimal consiste en un álgebra (definida como espacio vectorial sobre un cuerpo -*i.e.*, como se definió anteriormente-) en el cual todo polinomio unario no nulo [un polinomio unario es aquel sujeto a operaciones unarias -suma, resta y multiplicación-, lo que tiene como consecuencia que sea posible 1. Los términos del polinomio pueden ordenarse de forma ascendente y se pueden combinar sus términos cuando poseen las mismas potencias, 2. Es posible sumar, restar y multiplicar términos del polinomio -los cuales pueden ser funciones-, 3. Es posible sustituir el valor exacto de algún elemento x para encontrar el valor del polinomio final, como puede verificarse en (programador clic, 2021); la no nulidad hace referencia a que el valor concreto del polinomio es diferente de cero] es una permutación de su dominio, como se verifica en (Wikipedia, 2021). Nótese que la definición anterior se fundamenta a su vez en la definición de

ninguno de los conjuntos $A \in \mathfrak{G}$. Es natural limitarse siempre a considerar sólo estas $B - \acute{a}lgebras$[15]. Adicionalmente, es necesario hacer una aclaración con el fin de evitar confusiones, la cual consiste en que un álgebra de conjuntos es una colección de subconjuntos cerrados bajo uniones e intersecciones finitas, mientras que un sigma-álgebra de conjuntos es una colección cerrada bajo uniones e intersecciones contables[16]; complementariamente, un álgebra de Borel es un sigma-álgebra con las propiedades previamente expuestas.

Una forma de expresar sintéticamente lo planteado por Kolmogórov y Fomin es decir que un álgebra de Borel de un conjunto S es el mínimo[17] $\sigma - \acute{A}lgebra$ que contiene todos los conjuntos abiertos o cerrados de la recta real, es decir, es el $\sigma - \acute{A}lgebra$ más pequeño que es posible construir para contener dentro de sí todos los conjuntos abiertos (o todos los conjuntos cerrados) que son posibles de obtener

"polinomio unario", la cual es importante resaltar que se planteó en términos de su definición el lenguaje de programación C (un lenguaje derivado del paradigma POO, lo que naturalmente -tras lo desarrollado en esta investigación- no es casualidad) y no de su definición matemática formal; lo anterior obedece fundamentalmente a que la definición precisa de ***polinomio unario*** parece ser esquiva, puesto que se consultó toda la literatura que se encontraba a disposición -que comprende entre otros elementos las distintas enciclopedias en inglés y en español a disposición del investigador, así como foros de discusión en inglés y en español, etcétera- y la única definición con la precisión requerida fue la citada anteriormente.

[15] Si se revisa la discusión (MathOverFlow, 2011), se verificará que depende mucho del contexto y del autor lo que puede entenderse sobre frases como "resulta natural" ("in a natural way", en inglés) y afines. Para este caso "natural" parecería significar que la decisión de tomar tal o cual curso en la investigación realizada por Kolmogórov y Fomin es la que resulta intuitiva y lógica, la que en promedio tomaría el investigador sensato. Por supuesto, la explicación anterior es tremendamente abstracta, ¿por qué cualquier investigador sensato en promedio habría entonces de considerar únicamente sólo las álgebras de Borel? La respuesta parecería encontrarse en las dificultades técnicas (y hasta filosóficas) que aparecen al trabajar con otro tipo de álgebras, especialmente aquellas no-numerables, puesto que por definición el conjunto potencia de un conjunto no-numerable es no-numerable (véase (StackExchange Mathematics, 2011)) y esto implica que no sería posible medirlo y, por tanto, no parecería resultar verosímil ser capaz de asignarles una medida (para este caso, una probabilidad), debido a la imposibilidad de numeración de los elementos de la colección (de contabilizar los elementos de dicha colección -o conjunto, si fuese el caso-), lo que precisamente llevó a las paradojas de Cantor y Russell y al nacimiento de las diferentes escuelas de filosofía de las matemáticas, proceso que derivó en el nacimiento de la Metamatemática.

[16] Contable o numerable es toda aquella colección que puede ser puesta en una relación funcional biyectiva con los números naturales, por lo que pueden ser colecciones infinitas.

[17] Como se señala en (Weisstein, Minimum, 2021), es el valor más pequeño de un conjunto, función, etc.

dado un conjunto de referencia (a través de la función *conjunto potencia* $\wp(S) = 2^S$), el cual es conocido en teoría axiomática de las probabilidades como espacio muestral Ω y de este se estima el $\sigma - Álgebra$ de Borel. Los elementos de un álgebra de Borel se llaman *conjuntos de Borel*, lo que implica que el álgebra de Borel es también un sistema de conjuntos.

Sintéticamente, como señala (Weisstein, Borel Sigma-Algebra, 2021), un álgebra de Borel es un sigma-álgebra relacionado directamente con la topología del conjunto (véase la sección V.I. para comprender el concepto de "topología"); específicamente, un álgebra de Borel es el sigma-álgebra generado por todos los conjuntos abiertos (o todos los conjuntos cerrados).

Los $\sigma - Álgebra$ de Borel permiten enfocarse en conjuntos que son relativamente fáciles de usar (por encontrarse en la recta real). Estas estructuras matemáticas mantienen ciertas propiedades importantes que permiten definir el concepto de medida sobre conjuntos arbitrarios con características similares.

XVIII. Cantidad y Medida

XVIII.I. Cantidad

XVIII.I. I. Criterio de Clasificación para la Cantidad: Lo Individual (Singular), Lo Particular y Lo Universal (General)

Como se señala en (Fundación Gustavo Bueno, 2022), en la Naturaleza hay fenómenos individuales que, unidos en grupos, se rigen por leyes particulares. A su vez ya estos grupos están sujetos a leyes de un valor universal. Así, estas son categorías filosóficas que expresan las distintas conexiones objetivas del mundo, así como los niveles alcanzados en su conocimiento. Las categorías citadas se forman en el transcurso de la actividad cognoscitiva práctica. Los objetos del mundo real poseen su peculiaridad, gracias a lo cual se distinguen entre sí. Por este motivo, el objeto se percibe como algo singular. No obstante, ya la práctica elemental descubre en tales objetos rasgos que se repiten, que les son comunes. Dicho de otro modo: resulta que lo singular posee también rasgos generales. Los rasgos y propiedades generales pueden ser inherentes sólo a un reducido grupo de objetos o a todos los objetos y fenómenos; en el primer caso, aparecen como lo particular; en el segundo, como lo universal. Lo singular, lo particular y lo universal se encuentran en conexión indisoluble, formando una unidad; su diferencia es relativa; pasan recíprocamente de uno a otro (véase Lenin, t. XXXVIII, pág. 359). La resolución científica del problema que trata de la correlación de lo universal en la conciencia, de su análogo en la realidad y de las propiedades singulares de los objetos, ha provocado grandes dificultades en la historia de la filosofía, Históricamente, se formó en primer lugar la representación ingenuamente perceptible de lo universal como lo parecido, lo que se repite.

En ese momento no se plantea todavía la cuestión relativa a la fuente, a la causa de tal parecido, no se plantea el problema fundamental acerca de la naturaleza de lo universal, acerca de si éste refleja propiedades realmente existentes del mundo objetivo o tiene su raíz en la facultad de la conciencia generalizadora o en las propiedades de cierto absoluto espiritual. Los materialistas de la antigua Grecia eran partidarios de la primera idea acerca de la esencia de lo universal: Tales ve en el agua la base de todas las cosas, su universal; Heráclito la ve en el fuego; Demócrito, en los átomos. La concepción de lo universal como lo objetivo es propia asimismo de la mayor parte de los idealistas de la época clásica, pero en estos casos lo universal ya quedaba separado de la realidad material y se convertía en un mundo especial de esencias. Aristóteles criticó la teoría idealista de Platón sobre lo universal, pero no pudo resolver el problema. No considera lo universal como una esencia especial, aislada de lo singular. Según él, lo universal son, ante todo, abstracciones de la razón humana. Pero no quiere reconocerlas como esencias sólo pensadas, pues ello significaría negar su carácter objetivo. De ahí que Aristóteles considere también lo universal como esencia de los objetos singulares y como fin para el cual estos últimos existen. En el fondo se encuentra, en este punto, próximo a la idea platónica de lo universal. Con todo, si bien Aristóteles no resolvió el problema, lo planteó con precisión y ello explica que su doctrina sirviera de base para las discusiones entre nominalismo y realismo: las tesis contradictorias de la teoría de Aristóteles se convirtieron en la oposición de las escuelas filosóficas. La ciencia experimental de la Época Moderna, que se desarrolla en lucha contra la teología escolástica abstracta, dio origen a la protesta contra la interpretación teológica de lo universal. Vuelve a negarse el carácter objetivo de lo universal así entendido. Haciéndose eco de semejante posición, a partir de Locke se entendió a lo universal tan sólo como expresión verbal, abstracta, de la semejanza de los fenómenos y le niega toda realidad. Semejante criterio está en consonancia con la ciencia de aquel entonces, ante todo con la clasificación de los fenómenos en ella aceptada. El estudio, por la ciencia, de las leyes que rigen el mundo objetivo socava la concepción lockeana de lo universal. Ello se percibe ya en Kant y, sobre todo, en Hegel, quien diferencia lo "universal abstracto" como identidad, fijada en las palabras, de una serie de fenómenos (resultado de la simple semejanza) y lo universal auténtico, lo "universal concreto", entendido como esencia interna, como ley de la existencia y del cambio de los fenómenos. Sin embargo, únicamente lo espiritual –el concepto, la idea– forman, según Hegel, lo universal auténtico. La concepción marxista de lo singular, lo particular y lo universal se basa en el reconocimiento de la idea de lo universal como reflejo de la unidad objetiva de los fenómenos del mundo. La semejanza esencial de los objetos o de los procesos no es más que una expresión de este profundo nexo objetivo. "La forma de la universalidad en la naturaleza –escribe Engels– es la ley... La forma de la universalidad es la forma de lo acabado dentro sí mismo y, con ello, de la infinitud; es la unión en lo infinito de las muchas cosas finitas" (Dialéctica de la naturaleza, 1955, págs. 186, 185). Por este motivo, lo universal plasma en sí la riqueza de lo particular, de lo individual, de lo singular. La dialéctica de lo singular, lo particular y lo universal expresa los nexos esenciales necesarios del mundo. La conexión objetiva de lo singular, lo particular y lo universal se encuentra expresada en el lenguaje, en la forma de explicación del objeto, en el procedimiento de investigación de los objetos. La relación entre lo singular, lo particular y lo universal estriba en su conexión, en el hecho de que lo singular no existe sin lo universal, ni este último sin lo singular; estriba en el hecho de que lo singular, en ciertas condiciones, se transforma en lo particular y en lo universal, etc.

Resulta, pues, que las categorías de lo singular y lo universal expresan, ante todo, los nexos esenciales del mundo objetivo y sólo por esto caracterizan también el proceso de conocimiento del mismo. La actividad práctica, orientada constantemente hacia los objetos singulares, aparece bajo una nueva luz con el conocimiento de lo universal, de las leyes, aspectos y propiedades que se repiten en estos objetos, y se concreta tomando en consideración las particularidades de las mismas.

En la Naturaleza, de esta manera, lo individual, lo particular y lo universal están ligados mutuamente. Lo universal y lo particular se hallan en lo individual y se manifiestan sólo a través de lo individual. "Lo particular no existe de otra manera que en la relación que lleva hacia lo general. Lo general sólo existe en lo particular, a través de lo particular" (Lenin). El conocimiento refleja esta relación objetiva. "Todo conocimiento real, cabal, radica sólo en que en nuestra mente abstraemos lo único de su singularidad y lo traducimos en una particularidad y de esta última en la universalidad" (Engels). Por ejemplo, la tesis de que la frotación produce calor será un juicio sobre lo singular, puesto que aquí se hace notar un hecho singular. La tesis: "el movimiento mecánico se transforma en calor", será el juicio de lo particular, puesto que aquí se hace notar la forma mecánica particular del movimiento, que se transforma gracias a la frotación en otra forma particular del movimiento: en calor. Y, por último, la tesis: "cualquier forma de movimiento puede y debe transformarse en otra forma cualquiera del movimiento", será un juicio universal. Por consiguiente, lo singular, lo particular y lo general son formas del movimiento de los conceptos humanos, en los que se refleja el mundo objetivo. "Esto demuestra que las leyes por que se rige el pensamiento y las leyes porque se rige la Naturaleza se ajustan necesariamente entre sí, si sólo son correctamente concebidas” (Engels). El camino histórico del movimiento del conocimiento humano es el siguiente: de lo singular a lo particular y de lo particular a lo general. “Las ciencias naturales nos demuestran... la conversión de lo singular en lo general” (Lenin). Por ejemplo, ya los hombres prehistóricos sabían prácticamente que la frotación produce calor. Después de un largo período que duró miles de años, los hombres se convencieron de que todo movimiento mecánico, mediante la frotación, puede convertirse en calar, y, finalmente, en la fase actual del desarrollo de la ciencia, los hombres supieron que cualquier forma del movimiento puede, bajo determinadas condiciones para cada caso, convertirse en cualquier otra forma del movimiento. De esta manera, el juicio de lo singular, de lo particular y de lo universal, nace de la práctica humana. “Las formas lógicas y las leyes no son una cubierta vacía, sino el reflejo del mundo objetivo” (Lenin).

XVIII.I. II. Definición General de Cantidad: Cantidad Pura o Estructura Cuantitativa General

Como señala (Fernández, 2007, pág. 101), la primera vez que en la historia de la Filosofía se concibió el comienzo de la ciencia a partir de la cualidad y no de la cantidad fue en el sistema hegeliano, es decir, Hegel construyó un sistema lógico que comienza el proceso analítico con el puro Ser, concebido este como la inmediatez cualitativa del Ser, con las cosas tal y como se presentan formalmente, pero viendo esta forma como una cualidad, no una cantidad. Esto significa en primer lugar devolver a la filosofía a su propio ámbito[18], pero tal devolución implica también un retorno a través del cual la filosofía de transforma para reflejar, aunque de forma idealista (sería Marx quien se encargaría de hacerlo de forma materialista), el proceso evolutivo de la existencia misma en el pensamiento abstracto.

---

[18] El de la observación inmediata, que fue como nació tanto en occidente como en oriente, siendo en esta última región de donde es originaria.

Una de las múltiples y relevantes consecuencias que tal sistema lógico conllevó fue una nueva concepción de la cantidad. Como señala (Hegel, 2006, págs. 115-116), la cantidad es el puro ser[19] en quien la determinidad[20] es puesta, no ya como una unidad con el ser mismo sino como superada e indiferente a dicho Ser.

La expresión "magnitud" no es adecuada para hablar de "cantidad pura", a juicio de Hegel, porque designa principalmente la cantidad determinada y ello se observa en el hecho que la Matemática Pura suele definir a las magnitudes como lo que puede ser aumentado y disminuido, y aun cuando esta definición sea insuficiente por contener ya en sí lo definido en ella[21], pero, no obstante, expresa este pensamiento: que la determinación de magnitud es tal, que es puesta como alterable e indiferente, de modo que, no obstante sus mutaciones, un aumento de intensidad o extensión, la cosa, por ejemplo, una casa o el color rojo, etcétera, no deja de ser casa o color rojo, etcétera. Puesto que las variaciones pueden ser tanto discretas como continuas, la cantidad pura es la cantidad en general, la cantidad como abstracción de toda cantidad en particular. Lo que Hegel llama "cantidad pura", el autor de este estudio considera adecuado denominar *estructura cuantitativa general*.

Como señala (Herszenbaun, 2017, pág. 52), la cantidad pura produce una multiplicidad sin recurrir a la noción de límite (que es precisamente lo que critica Hegel de la definición matemática) recuperando así la noción de repulsión bajo la

[19] Es decir, el ser simplemente "puesto", las cosas tomadas tal y como se presentan de forma inmediata, por su apariencia.

[20] "La determinidad está designando la esfera lógica en donde el ser es puesto en su inmediatez e indeterminación. En ella se efectúa el comienzo positivo del desarrollo en cuanto el ser, como signo del comienzo, es puesto como concepto en sí. Así cobra sentido la primera afirmación de la Enciclopedia comprendida bajo el título cualidad: "El ser puro hace el comienzo, porque tanto como pensamiento puro como también indeterminado, es simple inmediatez, pues el primer comienzo no puede ser nada mediato y menos aún determinado" (…)" (Fernández, 2007, pág. 109).

[21] Aquí Hegel hace referencia a que la Matemática al definir "magnitud" hace uso implícito del concepto mismo de magnitud (porque magnitud implica por sentido común un aumento o disminución); esta crítica de Hegel es equivalente a lo que en la teoría de la demostración (rama fundacional de la Matemática Pura, por cierto) se conoce como *Círculo en la demostración* en cuanto presupone lo que quiere definir.

forma de discontinuidad. Además, a causa de lo anterior, la cantidad reúne la repulsión, bajo la forma de lo discreto y la atracción, bajo la forma de lo continuo. Así, la cantidad pura es tanto discreta como continua. Lo uno se opone a todo lo ajeno a sí, se presenta como indiferente ante todo otro. Pero la referencia a esto otro es inevitable y se presenta entonces como repulsión. La repulsión del uno frente a los otros unos es la producción de una multiplicidad a partir de una unidad. Pero estos otros unos suponen inevitablemente una continuidad con el uno antes considerado. La producción de esta multiplicidad parte del uno, y depende de la continuidad y discontinuidad de este uno respecto de los restantes; continuidad y discontinuidad dadas en el hecho de que el múltiple también son unos, pero no son el mismo individuo; es necesario explicar que, aunque formalmente la crítica de Hegel se dirige a la Matemática, en última instancia es una crítica del sistema aristotélico[22].

Por supuesto, aunque Hegel no recurra explícitamente a la noción de límite para dar una definición formal de cantidad[23], en términos de la dinámica no-lineal de los sistemas objetivos la generación de multiplicidad a partir de la repulsión que parte de una unidad (de un valor semilla o valor inicial) sólo bajo ciertos límites cuantitativos no produce un cambio cualitativo del fenómeno social o natural estudiado. Así, como se señala en (Rosental & Iudin, 1946, pág. 31), los fenómenos de la Naturaleza y de la Sociedad no sólo poseen una precisión cualitativa, sino también una definibilidad cuantitativa. La cantidad es una precisión que no se

---

[22] "Se dice que posee «cantidad» lo que es divisible en partes internas, cada una de las cuales -sean dos o más de dos- son por naturaleza algo uno, y algo determinado. Una pluralidad es una cantidad si es numerable y también lo es una magnitud si es mensurable. Se llama «pluralidad» lo potencialmente divisible en partes discontinuas, y «magnitud» lo divisible en partes continuas. A su vez, la magnitud que es continua en una dimensión es longitud, la que lo es en dos es latitud, y la que lo es en tres es profundidad. De éstas, la pluralidad limitada es número, la longitud es línea, la latitud es superficie y la profundidad es cuerpo. (Aristóteles, 1994, págs. 237-238). Precisamente al hacer referencia a "numerabilidad" y "mensurabilidad", Aristóteles está haciendo referencia explícita al concepto de límite y, con ello, incurriendo en un razonamiento circular.

[23] Las definiciones formales no toman en consideración el tiempo, la evolución de los fenómenos, el automovimiento, además de ser siempre construidas desde una lógica lineal o cuasilineal.

identifica con el objeto, es decir, si cambiamos cuantitativamente el objeto, éste no deja de ser lo que es hasta cierto momento.

Como señalan (Rosental & Iudin, 1971, págs. 54-55), la categoría de la cantidad traduce aquel aspecto del objeto que caracteriza al grado, al nivel de su desarrollo, a su composición cuantitativa. La calidad del objeto está estrechamente ligada a su aspecto cuantitativo, del que depende en el sentido que se señalará en el siguiente párrafo y que difiere de lo que en esta cita bibliográfica parecería implicarse. Así es como los elementos químicos diferentes se distinguen por su composición cuantitativa: por ejemplo, el núcleo del átomo de hidrógeno se compone de un protón, y alrededor de ese núcleo gira un electrón: el núcleo del átomo de uranio se compone de 92 protones y de 146 neutrones, y alrededor del núcleo giran 92 electrones. La vida social nos ofrece igualmente ejemplos de la dependencia de la calidad con respecto a la cantidad. El nivel de la productividad del trabajo y del desarrollo de las fuerzas productivas determina en última instancia, el advenimiento de tal o cual formación económica y social. El régimen de la comuna primitiva tenía por base un bajo nivel de productividad de trabajo y de las fuerzas productivas. El crecimiento de la producción y de la productividad de trabajo hizo estallar ese régimen, engendró la división social del trabajo, la propiedad privada y las clases: una nueva formación social y económica vio la luz. De igual manera, la capacidad de construir la sociedad comunista, la sociedad futura sin clases como teleología de las sociedades de clases generadas a partir de una sociedad sin clases, está en función de un determinado grado de desarrollo de las fuerzas productivas del trabajo, uno superior al del capitalismo.

Sobre lo señalado por los maestros filósofos de la escuela soviética, hay que recordar lo antes señalado en referencia al mérito de Hegel, que fue precisamente empezar a hacer ciencia a partir de cualidades, no de cantidades. Como se dijo, el concepto de cantidad pura es la generalización filosófica natural del concepto de límite matemático, puesto que la cantidad pura es la repulsión a partir de lo discontinuo y la atracción a partir de lo continuo, ello sin recurrir a la noción de cantidad porque es lo que se quiere definir y no puede recurrirse, para definir un algo, a ese algo que se quiere definir (no sin incurrir en un razonamiento circular); ello es precisamente lo que hace la matemática al concebir a la cantidad pura como límite, puesto que un límite implica variación y la variación implica automáticamente a la cantidad (porque lo cualitativo no puede variar de cualidad manteniendo su cualidad).

A causa de lo anterior, queda claro que lo que busca expresar la cantidad pura es lo mismo que el límite matemático, aunque bajo otra lógica que permite generalizar lo que busca expresar tal límite: algo puede alterarse bajo el espectro de determinadas restricciones sin que cambie su cualidad, y eso significa que bajo ese espectro la cualidad determina a la cantidad en última instancia (evidentemente existe interdependencia, pero también existe una dirección dominante que marca la tendencia de desarrollo de la cosa o sistema), sin embargo, cuando la alteración transgrede las restricciones en cuestión la cosa analizada cambia, gestándose así un salto cualitativo, generado por la acumulación cuantitativa, que cambia la calidad; sin embargo, incluso en ese tránsito siempre se mantiene invariante el hecho de que una vez configurada la nueva cualidad, la cantidad pasa nuevamente a depender de la calidad. Eso ocurre porque la cantidad está concebida como sometida a la calidad, siendo la calidad una estructura cuantitativa[24]. Así, la cantidad describe a la calidad, pero la describe en cuanto estructura cuantitativa, por ejemplo, cuando exponen al átomo de hidrógeno en términos de su descripción cuantitativa no consideran que hablar de 92 protones, 92 electrones y 146 neutrones sólo tiene sentido en su conjunto (y no de forma aislada) si se desea hacer referencia al átomo de hidrógeno, y que ese conjunto es precisamente una estructura cuantitativa, es decir, un conjunto de cantidades cuya descripción y significado no pueden ser, evidentemente, cuantitativas sino cualitativas, es decir,

---

[24] Debe hacerse énfasis en que se habla de una estructura cuantitativa, no de una cantidad, ni de algo cuantitativo, sino de una estructura cuantitativa.

teórica, que parta de algún marco conceptual de referencia. Alguien podría preguntarse qué pasa si se lleva esa lógica hasta el estado inicial del conocimiento de la humanidad, hasta la edad de piedra, ¿de qué marco conceptual referencial se partiría? La respuesta pone de manifiesto que concebir la ciencia desde la calidad se corresponde con la realidad histórica de la evolución del conocimiento en general y del científico en particular: en los albores de la humanidad se partió de algún estado de conocimientos e inclusive el considerar cuando se ejecutó el primer proceso de racionalización del primer ser humano (homo sapiens), el cual evidentemente debe haber partido de la intuición, no cambia en nada las cosas puesto que se ha verificado en la actualidad que se transmiten ciertos recuerdos de los presentes a las futuras generaciones a través de los genes, por lo que el primer homo sapiens debe haber tenido algún tipo de recuerdos de la especie anterior que lo generó como superación suya (que implica una eliminación y una conservación genética), recuerdos que son la información que objetivamente configura su intuición, ello aún sin considerar la experiencia que podría haber tenido de forma consciente de sus antepasados y propia. Entonces sí, la calidad determina a la cantidad, aunque sea bajo ciertas restricciones por cuanto casi todo es relativo, a pesar de que siempre existe la dominancia antes señalada.

Así pues, el método marxista exige que se consideren los aspectos y los cambios cuantitativos y cualitativos de los objetos y de los fenómenos desde el punto de vista de su vinculación estrecha y de su acción recíproca. La dialéctica de su interacción es de una gran importancia para la concepción científica del desarrollo.

XVIII.I. III. El Cuanto o Estructura Cuantitativa Particular

Partiendo de (Hegel, 2006, págs. 116-118), el cuanto es entonces la cantidad limitada. El cuanto es el resultado concreto de un proceso de medición (lo que la matemática entiende como magnitud), por eso es que se desarrolla y determina concretamente en el número. El cuanto o *quantum* es "how much". Es la forma particular que adopta la cantidad pura.

Hegel se refiere a alguna cantidad concreta en particular (donde las cantidades son objetos matemáticos como 3 y 2009, números); o para referirse en abstracto precisamente a cualquier cantidad en particular, tal y como de manera equivalente la palabra "animal" se refiere en abstracto a, precisamente, cualquier animal en particular. Así, el cuanto es un concepto de cantidad en particular que unifica lo abstracto y lo concreto, que es este aspecto lógico del sistema hegeliano que Marx transformó como *lo concreto pensado*.

XVIII.I. IV. El Grado o Estructura Cuantitativa Singular

Partiendo de (Hegel, 2006, págs. 118-119), el límite es idéntico con la totalidad del cuanto mismo, y como determinación múltiple en-sí. Es la magnitud extensiva, pero como simple en sí, es la magnitud intensiva o grado. La diferencia entre las magnitudes continuas o discretas, y las extensivas e intensivas, consisten, por tanto, en que las primeras se refieren a la cantidad en general (a la estructura variacional de la cantidad), mientras las segundas se refieren en cambio al límite o determinidad (la cualidad de ser determinado) de la cantidad como tal.

Así, el grado es la magnitud intensiva o intensidad[25], diferenciándose del cuanto en tanto este es definido como la magnitud extensiva o extensión de la cosa (lo que, por ejemplo, en teoría de conjuntos se conoce como cardinalidad), siendo esta extensión un concepto relativo al "tamaño" de la cosa dada. En Álgebra Lineal, la dirección de un vector es su orientación, es decir, el ángulo en relación al eje X. Este ángulo no es otra cosa que su grado de abertura en relación al eje X, es decir, es la intensidad de dicha abertura.

En Estadística, a pesar de ser una ciencia axiomatizada con la teoría de conjuntos, el concepto de "intensidad" se presenta de manera menos abstracta. Por ejemplo, se

[25] Puesto que el grado es la magnitud intensiva o intensidad, esta equivalencia que permite definir a la intensidad en términos en términos del grado: la intensidad es el grado de fuerza con que se manifiesta un agente natural, una magnitud física, una cualidad, una expresión, etc., que es la definición estándar del idioma español.

habla de intensidad cuando se habla de factores de inflación de varianza (VIF, por su nombre en inglés), cuando se compara niveles de verosimilitud a través de algún criterio de información (AIC, BIC, etc.) o al hablar del coeficiente de correlación y del coeficiente de determinación.

Al igual que con las magnitudes continuas y discretas, las magnitudes extensiva y extensiva no son dos especies, cada una de las cuales contendría una determinidad que la otra no tendría; lo que es magnitud extensiva es además intensiva; y viceversa. Como se muestra a continuación, este planteamiento hegeliano (y compatible en este aspecto concreto con el materialismo dialéctico) se encuentra respaldado por la definición formal de límite que es posible establecer desde el análisis matemático, que implica lo discreto y lo continuo en conexión indisoluble.

Como se señala en (Nabi, 2021, págs. 24-29), es necesario comenzar por familiarizarse un poco con la definición formal de un límite, que no es más que la formalización de la noción intuitiva de aproximación hacia un punto concreto de una sucesión o una función, a medida que los parámetros[26] de esa sucesión o función se acercan a un determinado valor. Se dice que $f(x)$ se acerca a un límite cuando x se acerca a un valor a. Ahora bien, al hablar de un acercamiento o aproximación, se está hablando implícitamente de la distancia entre dos valores. ¿Cómo es posible representar la noción de cercanía?, restando un valor de otro para conocer dicha distancia. En el caso de la definición formal de un límite, al decir que $f(x)$ se acerca hacia un valor límite L se tiene que sustraer L de $f(x)$, es decir, $f(x) - L$ y al decir que x se acerca hacia un valor a se tiene que hacer lo mismo, es decir, $x - a$. Sin embargo, las distancias no puede ser valores negativos y para garantizarlo se recurre a la utilización del valor absoluto para garantizar valores positivos en la resta, por tanto, se tendría $|f(x) - L|$ y $|x - a|$. Esto a su vez implicaría que $|f(x) - L|$ es un valor muy pequeño cuando $|x - a|$ es un valor muy pequeño.

[26] Constantes que pueden ser variables.

Adicionalmente, se tendrá que elegir un determinado valor para $|f(x) - L|$ y otro determinado valor para $|x - a|$, debido a que es necesario acotar o "encerrar" cada uno de estos valores absolutos, ¿cómo es que se logra acotar cada uno de estos valores absolutos?, la respuesta se encuentra en la definición misma del valor absoluto. Un valor absoluto no es más que el valor numérico de un número real sin tener en cuenta su signo. Entonces cuando se "encierra" cada una de las restas automáticamente se está acotando o "cercando" alrededor de determinado valor. Por ejemplo, el $|3|$ significa que $-3 < |3| < 3$. Quien planteó esta definición formal de un límite fue el matemático francés Augustin Louis Cauchy, diciendo que habría un error en la aproximación de $f(x)$ hacia L, lo que denotó por la letra $\mathcal{E}$ y que habría a su vez una distancia que representaría el cambio en las abscisas de x hacia a, lo que denotó con la letra δ. Lo anterior significa que Épsilon ($\mathcal{E}$) es el error de aproximación de $f(x)$ hacia L y Delta (δ) es la distancia recorrida o la variación en las abscisas al pasar de un valor x hacia un valor a.

Por supuesto, realizar el acotamiento de forma adecuada en términos matemáticos es necesario que tanto Épsilon como Delta sean positivos, es decir, mayores que cero, pues de lo contrario, el acotamiento no sería posible. Finalmente, se requiere también que el valor absoluto de x menos a sea también mayor que cero, ¿por qué?, pues al plantear la definición Épsilon-Delta se está planteando a su vez que x tiende hacia a, pero es una tendencia de x en que esta variable tomará valores cercanos en relación con a, sean estos mayores o menores que a, pero nunca iguales que a. Al introducir el valor absoluto y garantizar que la resta sea positiva, se está introduciendo también que $0 < |x - a|$, pues cero es siempre menor que cualquier número positivo. Lo anteriormente expuesto debe complementarse con el hecho que para que un límite L exista, el valor del límite L cuando x tiende hacia a tanto por la izquierda como por la derecha, debe ser el mismo. ¿Cómo es posible esto?, la respuesta se encuentra en la misma definición formal de un límite y en el teorema del encaje. Al plantear que $|f(x) - L| < \mathcal{E}$ se está expresando a su vez que $L - \mathcal{E} <$

$f(x) < L + \mathcal{E}$, es decir, que el valor de la función evaluada en x se encontrará en un intervalo equivalente al límite menos Épsilon y el límite más Épsilon, lo que matemáticamente significa que el límite será idéntico en ambos extremos del intervalo (de ahí que se "encaje" o "acote" el valor de la función, de ahí que también se le conozca como "teorema del sándwich"); análogamente, al plantear que $|x - a| < \delta$ se está expresando a su vez $a - \delta < x < a + \delta$, es decir, que el valor de x se encontrará en un intervalo equivalente a la tendencia menos Delta y la tendencia más Delta, lo que matemáticamente significa que la tendencia será idéntica en ambos extremos del intervalo. Siendo esto así, no importa si tomemos un valor por la izquierda o por la derecha de la tendencia de x, la tendencia en sí misma será igual y el valor de la función evaluada en x tendrá también el mismo límite tanto por la izquierda como por la derecha. Así, estableciendo

$$-\mathcal{E} < f(x) - L < \mathcal{E}$$

$$L - \mathcal{E} < f(x) < L + \mathcal{E}$$ [27]

$$0 < |x - a| < \delta$$

$$|x - a| < \delta$$

$$-\delta < x - a < \delta$$

$$-\delta + a < x < \delta + a,$$

se obtiene la definición formal de un límite para una función $f(x)$ cuando x tiende hacia un valor a:

[27] Al restarle y sumarle al límite un valor Épsilon a la izquierda y derecha de la función, respectivamente, lo que se establece es un acotamiento de dicha función en un intervalo. Lo anterior implica que el acotamiento por la izquierda representa un valor menor a la función evaluada en x y el acotamiento por la derecha representa un valor mayor a la función evaluada en x.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Como queda demostrado, la definición formal de límite unifica estructuras variacionales continuas y discretas.

En el grado está puesto (implícito) el concepto de *quantum*. Es la magnitud como indiferente en-sí y simple, pero de modo que la determinidad, por la cual es un cuanto está fuera de-sí, en otra magnitud. En esta contradicción, que consiste en que el límite indiferente que es-para-sí es la exterioridad absoluta[28], se halla puesto el progreso cuantitativo infinito: una inmediatez que se convierte por tanto inmediatamente en su opuesto, es decir, en el ser-mediato (en el ir más allá del cuanto que ha sido puesto precisamente); y recíprocamente. El número es pensamiento; pero pensamiento como ser que es perfectamente exterior a sí mismo. No pertenece a la intuición, porque es pensamiento; pero es pensamiento que tiene por determinación la exterioridad de la intuición[29] y, es precisamente ello, lo que posiciona en términos gnoseológicos a la escuela constructivista de las matemáticas

---

[28] A lo que aquí se refiere Hegel es a que el límite general que expresa la esencia de los fenómenos (que sería el equivalente idealista a lo concreto pensado en Marx) es también el límite dentro de lo cual lo concreto puede suscitarse. Por ejemplo, el límite teórico para las bajas temperaturas es el cero absoluto (en escala absoluta o escala Kelvin, mientras que $-273.15°$ en escala centígrada) y nunca en el universo se ha encontrado, hasta el momento, un lugar en el que se alcance esta temperatura. Esto se explica puesto que el cero absoluto implica que la energía de un cuerpo y de sus partes constituyentes sea cero, lo cual es imposible físicamente (por eso es un límite teórico) debido a que siempre habrá, por mucho que pueda tender a la nulidad, movimiento (que implica una cantidad de movimiento), pues es una propiedad intrínseca de materia; por supuesto, existen lugares que se encuentran cerca de tal límite teórico, como la nebulosa Boomerang (curioso nombre para un sistema físico que está cerca del movimiento nulo, $-272\ °C$ o $1.15\ °K$) o el Laboratorio de los Átomos Fríos en Estados Unidos ($-273{,}14999999999\ °C$ o $1.00044417195022 11e-11\ °K$).

[29] Aquí Hegel se refiere a que el fundamento de la generación de la categoría "número" por el proceso del pensar es la intuición, pero ¿qué es la intuición? La intuición sea la facultad de conocer de modo inmediato la verdad sin previo razonamiento lógico, no es en lo absoluto una forma especial, divina, innata, del conocimiento. Abarcar intuitivamente la esencia de los fenómenos, hallar la solución de cualquier problema, sólo es posible gracias a una gran experiencia y a profundos conocimientos. La intuición es una de las formas en que dichos caminos se manifiestan, forma sujeta a ley, basada en el pensamiento lógico y en la práctica. Tras la facultad de adivinar "súbitamente" la verdad, se encuentra en realidad una experiencia acumulada, un saber adquirido anteriormente. Los resultados del conocimiento intuitivo no necesitan de un criterio especial de veracidad ("evidencia por sí misma", etc.), sino que también se demuestran lógicamente y se comprueban por la práctica (Fundación Gustavo Bueno, 2022).

(fundada por Bishop) por encima de las escuelas intuicionista (fundada por Brouwer) y formalista (fundada por Hilbert).

Por consiguiente, el cuanto, puede, no sólo ser aumentado y disminuido hasta el infinito, sino que él mismo es, por medio de su concepto, este ir fuera y más allá de sí mismo. El progreso cuantitativo infinito constituye el cuanto en general, y, puesto en su determinidad, el grado (que es el cuanto en particular). Esta exterioridad del cuanto en su propia determinidad en-sí-mismo constituye su cualidad; en esta exterioridad, el cuanto es precisamente lo que es y está en relación consigo mismo.

En él se hallan unificados el ser-fuera-de-sí, lo cuantitativo, y el ser para sí; es decir, lo cualitativo. El cuanto, puesto así en sí mismo, es la relación cuantitativa y constituye la determinidad, la cual tanto es un cuanto inmediato (por ejemplo, el exponente de una potencia), como una mediación (por ejemplo, una función que expresa la relación de un cuanto con otro; los dos lados de la relación no valen por su valor inmediato, sino cuyo valor reside sólo en tal relación).

Los lados de la relación entre cuantos son aún cuantos inmediatos, y por esto su relación es también indiferente, es un cuanto (el exponente): la determinación cuantitativa y cualitativa son aún exteriores a sí mismas (lo que implica que se encuentran separadas aún dentro del proceso de mediación dialéctica, no se han sintetizado dialécticamente).

XVIII.I. Medida

Como señala (Kolmogórov & Fomin, Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional, 1978, pág. 290), el concepto de medida de un conjunto constituye una generalización natural de los siguientes conceptos: 1) de la longitud de un segmento, 2) del área de una figura plana, 3) del volumen de una figura en el espacio, 4) del incremento de una función no-decreciente en el semisegmento $[a, b)$, 5) de la integral de una función no negativa en una región lineal, plana, del espacio, etc. Retomando lo planteado en (Kolmogórov, Selected Works, 1992, págs.

49-55), considérese un conjunto A con a elementos. Se dice que A está equipado con una medida M si una cierta medida $M(E)$ es asignada a alguno de los subconjuntos E de A. El conjunto A, junto con su medida M, conforman un *espacio métrico*. La medida de un conjunto es un número real que es positivo o nulo. Además, la medida asume que si dos conjuntos no se intersecan (no tienen elementos en común) la medida de su suma es igual a la suma de sus medidas (es decir, la medida es lineal) y que la existencia de medidas de dos conjuntos implica la existencia de la medida de un tercer conjunto (que es igual a la medida de ambos conjuntos). La medida de todo el espacio de referencia, en el contexto de las probabilidades, es igual a 1. Un sistema de medidas es contablemente cerrado si contiene todas las posibles sumas contables de sus elementos. Finalmente, una medida es normal si para los conjuntos equipados de medida la condición $E = \sum E_n,\ E_n \cdot E_m = 0,\ n \neq m\ (n = 1,2,\dots)$ implica $M(E) = \sum M(E_n)$; el enunciado anterior establece que cuando los subconjuntos E de A tengan entre sí una relación lineal perfecta (*i.e.*, se nulifican al multiplicarse escalarmente) implica que la aplicación de la medida M sobre dichos subconjuntos será un procedimiento lineal (aplicarla al todo es equivalente a aplicarla a la suma de las partes).

Adicionalmente, con base en (Hegel, 2006, págs. 121-122), debe decirse que la medida es el cuanto cualitativo inmediato (a diferencia de la cantidad pura), un cuanto al cual está ligado una existencia o una cualidad. Estando la cualidad y la cantidad en la medida sólo en unidad inmediata, su diferencia surge de modo igualmente inmediato. El cuanto específico es, por consiguiente, en parte un mero cuanto; y la existencia es capaz de aumento y disminución, sin que la medida, la cual es una regla, sea por esto suprimida; pero, en parte, la alteración del cuanto es también una alteración de la cualidad.

Lo desmesurado es primeramente este andar de una medida a través de su naturaleza cuantitativa, más allá de su determinación cualitativa. Pero puesto que la otra relación cuantitativa, lo desmesurado de la primera, es también cualitativa, lo desmesurado es también una medida. Estos dos tránsitos: de la cualidad al cuanto y de éste otra vez a aquélla, pueden ser representados como progreso infinito, como el suprimir y el restaurar la medida en lo desmesurado, por ejemplo, este sería el caso de lo que hacen las técnicas de renormalización en los fenómenos críticos, entre los que se encuentra, por ejemplo, el hecho de que al pasar de un determinado umbral de presión y temperatura los estados líquido y gaseoso de un fluido se superponen, lo cual matemáticamente se expresa en que la función de correlación entre los elementos del sistema dinámico (conocida como longitud característica o medida característica del sistema dinámico) diverge (se indetermina numéricamente hablando) y las técnicas de renormalización tienen como finalidad precisamente restaurar la medida característica del sistema dinámico, de ahí su nombre.

Lo que de hecho sucede es que la inmediatez, que pertenece aún a la medida como tal, es suprimida; la misma cualidad y cantidad son, en la medida, primeramente inmediatas, y la medida misma es solamente su relativa identidad. Pero la medida se muestra suprimida en lo desmesurado, y, sin embargo, en éste -que es la negación de la medida, pero es también la unidad de la cuantidad[30] y la cantidad- ya acompañada solamente de sí misma.

Lo infinito, la afirmación como negación de la negación, tenía, pues, en lugar de los lados abstractos del ser y de la nada, de lo algo y de lo otro, etcétera, como sus lados, la cualidad y la cantidad. Éstas son: 1) En primer lugar, la cualidad que ha pasado a la cantidad y la cantidad que ha pasado a la cualidad, con lo cual ambas se muestran como negaciones; 2) pero en su unidad (la medida) son originariamente distintas, y la una es sólo mediante la otra; y 3) como la inmediatez de esta unidad se ha mostrado como suprimiéndose a sí misma, esta unidad es ahora puesta como lo que ella es en sí, como simple autocorrelación en sí, que contiene en sí, como superados, el ser en general y sus formas o, lo que es lo mismo, así el ser se muestra como la reducción de la mediación a la simple

[30] Del latín *quantĭtas, -ātis* 'cantidad'. Es la cantidad expresada en un sentido facultativo (en términos de que puede ser).

referencia de sí mismo. El ser o la inmediatez, que mediante la negación de sí misma es mediación consigo misma y referencia a sí misma, y también por ello, mediación que se niega elevándose a referencia a sí misma, a inmediatez, es la esencia.

XIX. Medida $\boldsymbol{\sigma - Aditiva}$ y Medida Contable Sub-Aditiva

Sea ϕ una función real y sea $\mathbb{S}$ un $\sigma - \acute{A}lgebra$. La función ϕ es $\sigma - aditiva$ cuando

$$\phi(S) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi(S_i), donde\ S \in \mathbb{S}; S = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\, , S_i \bigcap S_j = 0$$

Lo anterior significa que, para un conjunto finito de sucesiones de conjuntos disjuntos (sin elementos en común), la longitud de la unión de estos conjuntos es igual a la suma de las distancias (que se expresan cuantitativamente en longitudes) de estos conjuntos.

La función ϕ es contable sub-aditiva cuando:

$$\phi(S) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \phi(S_i), cuando\ S \in \mathbb{S};\ \ S \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$$

Lo anterior significa la unión infinita $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ puede contener elementos que no necesariamente estén en S. Así, un medida sub-aditiva es la función que define la suma de dos conjuntos dentro de un dominio como aquella cuyo resultado será siempre otro elemento menor o igual que la suma de los valores de las funciones evaluadas en cada conjunto.

Así, las diferencias entre ambos tipos de funciones es la restricción sobre el resultado que imponen: en las aditivas, el resultado debe ser igual que la suma de los insumos, mientras que en las sub-aditivas el resultado debe ser menor o igual que la suma de los insumos. Por ello, las funciones aditivas son un caso particular de las medidas sub-aditivas.

Para comprender de manera aplicada el significado de los dos tipos de funciones antes descritos, considérese un determinado modelo de herencia genética como el utilizado en (Huang & Mackay, 2016), el cual se procederá a especificar con base en (Falconer & Mackay, 1997, págs. 108-109).

Las propiedades genéticas de una población se expresan en términos de frecuencias génicas y frecuencias genotípicas. Para deducir la conexión entre éstas por un lado y las diferencias cuantitativas que presenta un carácter métrico por otro, se debe introducir un nuevo concepto, el concepto de valor, expresable en las unidades métricas (unidades de medición) con las que se mide el carácter (alelo). El valor observado cuando se mide el carácter de un individuo es el valor fenotípico de ese individuo. Todas las observaciones, ya sean de medias, varianzas o covarianzas, deben basarse claramente en mediciones de valores fenotípicos. Para analizar las propiedades genéticas de las poblaciones se tiene que dividir el valor fenotípico en partes componentes atribuibles a diferentes causas. La explicación de los significados de estos componentes es de importancia fundamental para la Genética, así como también la explicación relativa a cómo la media de la población está influenciada por el conjunto de frecuencias génicas.

La primera división del valor fenotípico es en componentes atribuibles a la influencia del genotipo y el ambiente. El genotipo es el conjunto particular de genes que posee el individuo, y el ambiente son todas las circunstancias no genéticas que influyen en el valor fenotípico. La inclusión de todas las circunstancias no genéticas bajo el término "ambiente" significa que el genotipo y el ambiente son, por definición, los únicos determinantes del valor fenotípico. Los dos componentes de valor asociados con el genotipo y el ambiente son el valor genotípico y la desviación ambiental. Es posible pensar en el genotipo en términos de que confiere un cierto valor al individuo, mientras que al medio en términos de que provoca una desviación del valor conferido al individuo por el genotipo, desviación que puede ir en una u otra dirección. Simbólicamente lo anterior se expresa como

$$P = G + E,$$

donde P es el valor fenotípico, G es el valor genotípico y E es la desviación que aporta el ambiente.

La desviación ambiental media en la población en su conjunto se toma como cero, de modo que el valor fenotípico medio es igual al valor genotípico medio, lo que probabilísticamente implica asumir que dicha desviación se distribuye con media cero, así como también, en términos de teoría evolutiva, que el ambiente no ejerce influencia alguna en la configuración genética del individuo. Por tanto, el término "media poblacional" se refiere entonces igualmente a valores fenotípicos o genotípicos. Cuando se trate con generaciones sucesivas se supondrá por simplicidad que el ambiente permanece constante de generación en generación, de modo que la media de la población es constante en ausencia de cambio genético. Si fuese posible replicar un genotipo particular en varios individuos y medirlos en condiciones ambientales normales para la población, sus desviaciones ambientales medias serían cero y, en consecuencia, su valor fenotípico medio sería igual al valor genotípico de ese genotipo particular. Este es el significado (bajo los restrictivos y poco realistas supuestos establecidos) del valor genotípico de un individuo. En principio es medible, pero en la práctica no lo es, excepto cuando se trata de un solo locus[31] donde los genotipos son fenotípicamente distinguibles, o de los genotipos representados en líneas muy endogámicas[32]. A los efectos de la deducción, debemos asignar valores arbitrarios a los genotipos en discusión. Esto se hace de la siguiente manera. Considerando un solo locus con dos alelos, A_1 y A_2, llamamos al valor genotípico de un homocigoto $+a$, al del otro homocigoto $-a$ y al

[31] *Locus* es el sitio físico o ubicación de un gen específico dentro de un cromosoma)
[32] La endogamia es la producción de descendencia mediante el apareamiento o crianza de individuos u organismos que están estrechamente relacionados genéticamente.

del heterocigoto d; se adopta la convención de que A_1 es el alelo que aumenta el valor. Así, se tiene una escala de valores genotípicos como en la figura que se presenta a continuación. El origen, o punto de valor cero, en esta escala está a mitad de camino entre los valores de los dos homocigotos[33]. El valor d del heterocigoto depende del grado de dominancia. Si no hay dominancia, $d = 0$; si A_1 es dominante sobre A_2, d es positiva, y si A_2 es dominante sobre A_1, d es negativa. Si la dominancia es completa, d es igual a $+a$ o $-a$, y si hay sobredominancia, d es mayor que $+a$ o menor que $-a$. El grado de dominancia puede expresarse como d/a.

Figura 1: Escala de Valores Genotípicos

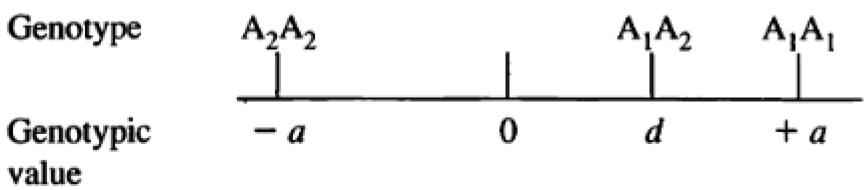


Fig. 7.1. Arbitrarily assigned genotypic values.

Fuente: (Falconer & Mackay, 1997, pág. 109).

Una vez bien especificada la configuración del modelo, es posible proceder a explicar qué son las medidas sigma-aditivas y las medidas sub-aditivas con base en lo señalado por (Huang & Mackay, 2016, pág. 3). Así, señalan los autores que un modelo genético aditivo se refiere a la situación en la que $d = 0$ y, por lo tanto, existe una relación lineal perfecta entre el valor genotípico y el número de copias de los alelos A. Por tanto, las funciones o medidas aditivas son aquellas que sirven

[33] Siendo los cromosomas la estructura que alberga el ADN/ARN en la célula, así como también alberga proteínas que contribuyen a que el ADN/ARN pueda existir dentro de la célula en la forma apropiada para el desempeño estable de sus funciones, un ente homocigoto es aquel formado por la unión de dos células sexuales con la misma dotación cromosómica (el número de cromosomas por unidad celular que presenta el ente estudiado) y que en términos alélicos (un alelo es cada una de las maneras en que puede manifestarse un gen) es dominante de la forma AA, mientras que un ente heterocigoto es aquel formado por la unión de dos células sexuales con diferente dotación cromosómica y que en términos alélicos es dominado o recesivo de la forma aa.

para cuantificar relaciones de naturaleza completamente lineal entre determinadas variables, tal y como la relación entre el valor genotípico y el valor fenotípico bajo los supuestos antes definidos.

XX. Referencias

Aristóteles. (1994). *Metafísica.* Madrid: Editorial Gredos. Obtenido de https://p300.zlibcdn.com/dtoken/60247e618940ef23b0e4c65e39278b85

Bertalanffy, L. v. (1989). *Teoría General de los Sistemas. Fundamento, desarrollo, aplicaciones* (Primera edición en español ed.). México, D.F.: Fondo de Cultura Económica.

Berzelius, J. J. (1822). *The Use of the Blowpipe in Chemical Analysis.* London: C. Baldwin Printer. Obtenido de https://ia600607.us.archive.org/33/items/b29333404/b29333404.pdf

Bradley, T.-D. (20 de Abril de 2015). *Maximal ≠ Maximum!* Obtenido de Set Theory • Algebra: https://www.math3ma.com/blog/maximal-not-maximum

Enclyclopedia of Mathematics. (11 de Octubre de 2014). *Homeomorphism*. Obtenido de https://encyclopediaofmath.org/wiki/Homeomorphism

Eremenko, A. (30 de Abril de 2020). *Stack Exchange, History of Sciences and Mathematics*. Obtenido de What was Kolmogorov's point of view in the philosophy of mathematics?: https://hsm.stackexchange.com/questions/11730/what-was-kolmogorov-s-point-of-view-in-the-philosophy-of-mathematics

Falconer, D. S., & Mackay, T. F. (1997). *Introduction to Quantitative Genetics.* Harlow: Addison Wesley Longman Limited. Obtenido de https://p303.zlibcdn.com/dtoken/31d11918b1aca4f8da7c4bd459f38c56

Fernández, J. E. (2007). El Significado de la Fórmula "Ser del Comienzo" en la Ciencia de la Lógica de Hegel. *Revista de Filosofía de Santa Fe*(15), 99-111. Obtenido de http://www.scielo.org.ar/pdf/topicos/n15/n15a06.pdf

Frolov, I. T. (1984). *Diccionario de filosofía.* (O. Razinkov, Trad.) Moscú: Editorial Progreso. Obtenido de http://filosofia.org/

Fundación Gustavo Bueno. (04 de Abril de 2022). *Individual, Particular y General*. Obtenido de Diccionario Soviético de Filosofía: https://www.filosofia.org/enc/ros/ind1.htm

Fundación Gustavo Bueno. (04 de Abril de 2022). *Intuición*. Obtenido de Diccionario Soviético de Filosofía: https://www.filosofia.org/enc/ros/intu.htm

González, F. (2003). *Álgebra I* (Primera ed.). San José, San José, Costa Rica: Editorial Universidad Estatal a Distancia.

Hamilton, W. R. (1856). MEMORANDUM RESPECTING A NEW SYSTEM OF ROOTS OF UNITY. *Philosophical Magazine*, 446. Obtenido de https://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Hamilton/Icosian/NewSys.pdf

Hegel, G. W. (2006). *Filosofía de la Lógica.* Buenos Aires: Editorial Claridad S.A.

Herszenbaun, M. A. (2017). La Lectura Hegeliana de "La Antinomia de la Razón Pura". *Ideas y Valores, 65*(165), 35-56. Obtenido de http://www.scielo.org.co/pdf/idval/v66n165/0120-0062-idval-66-165-00035.pdf

Huang, W., & Mackay, T. F. (2016). The Genetic Architecture of Quantitative Traits Cannot Be Inferred from Variance Component Analysis. *PLOS Genetics*, 1-15. Obtenido de https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC5094750/pdf/pgen.1006421.pdf

Karagila, A. (17 de Septiembre de 2014). *Maximum/Maximal set*. Obtenido de Stack Exchange Mathematics: https://math.stackexchange.com/questions/935134/maximum-maximal-set

Kolmogórov, A. N. (1956). *FOUNDATIONS OF THE THEORY OF PROBABILITY* (Segunda ed.). (N. Morrison, Trad.) New York: Chelsea Publishing Company.

Kolmogórov, A. N. (1992). *Selected Works of A. N. Kolmogórov* (Vol. II). (A. N. Shiryayev, Ed., & G. Lindquist, Trad.) Dordrecht, Netherlands: Springer Science+Business Media.

Kolmogórov, A. N., & Fomin, S. V. (1978). *Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional* (Tercera ed.). (q. e.-m. Traducido del ruso por Carlos Vega, Trad.) Moscú: MIR.

MathOverFlow. (28 de Febrero de 2011). *What does the adjective "natural" actually mean?* Obtenido de https://mathoverflow.net/questions/56938/what-does-the-adjective-natural-actually-mean/56956

Nabi, I. (7 de Junio de 2021). *DISQUISICIONES ELEMENTALES SOBRE LOS TEOREMAS FUNDAMENTALES DEL CÁLCULO EN UNA VARIABLE (ENSAYO SOBRE FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS, 2015)*. Obtenido de Marxist Statistics: https://marxiststatistics.com/2021/06/07/disquisiciones-elementales-sobre-los-teoremas-fundamentales-del-calculo-en-una-variable-ensayo-sobre-filosofia-de-las-matematicas-2015/

Online Etymology Dictionary. (12 de Febrero de 2021). *Isomorphism*. Obtenido de https://www.etymonline.com/word/isomorphism

programador clic. (5 de Febrero de 2021). *Estructura de datos-operación de polinomio unario (suma, resta, multiplicación) [implementación del lenguaje C]*. Obtenido de Artículos: https://programmerclick.com/article/544137201/

Ríbnikov, K. (1974). *Historia de las Matemáticas.* Moscú: Editorial Mir.

Rosental, M. M., & Iudin, P. F. (1971). *DICCIONARIO FILOSÓFICO.* San Salvador: Ediciones Tecolut.

Rosental, M., & Iudin, P. (1946). *Diccionario Filosófico Marxista.* Montevideo: Ediciones Pueblos Unidos. Obtenido de https://www.filosofia.org/urss/img/1946dfm.pdf

Spivak, M. (2010). *Cálculo Infinitesimal.* Barcelona: REVERTÉ.

Stack Exchange Mathematics. (20 de Julio de 2010). *What are the differences between rings, groups, and fields?* Obtenido de https://math.stackexchange.com/questions/75/what-are-the-differences-between-rings-groups-and-fields

StackExchange Mathematics. (31 de Octubre de 2011). *Is the power set of the natural numbers countable?* Obtenido de https://math.stackexchange.com/questions/77656/is-the-power-set-of-the-natural-numbers-countable

Timmermans, B. (2012). Prehistory of the concept of mathematical structure: Isomorphism between group theory, crystallography and philosophy. *The Mathematical Intelligencer, XXXIV*(3), 41-54. Obtenido de https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&ved=2ahUKEwj87c-_7OXuAhWKylkKHchyBt4QFjAAegQIARAC&url=https%3A%2F%2Fdipot.ulb.ac.be%2Fdspace%2Fbitstream%2F2013%2F127958%2F3%2FStructure.pdf&usg=AOvVaw0OCEQtLNAUZl4oJCHBmB2-

Weisstein, E. (11 de Enero de 2021). *Algebra*. Obtenido de MathWorld-A Wolfram Web Resource: https://mathworld.wolfram.com/Algebra.html

Weisstein, E. (11 de Enero de 2021). *Borel Sigma-Algebra*. Obtenido de MathWorld-A Wolfram Web Resource: https://mathworld.wolfram.com/BorelSigma-Algebra.html

Weisstein, E. (12 de Febrero de 2021). *Division Algebra*. Obtenido de MathWorld-A Wolfram Web Resource: https://mathworld.wolfram.com/DivisionAlgebra.html

Weisstein, E. (11 de Enero de 2021). *Maximal Element*. Obtenido de MathWorld-A Wolfram Web Resource: https://mathworld.wolfram.com/MaximalElement.html

Weisstein, E. (11 de Enero de 2021). *Minimal Set*. Obtenido de MathWorld-A Wolfram Web Resource: https://mathworld.wolfram.com/MinimalSet.html

Weisstein, E. (11 de Febrero de 2021). *Minimum*. Obtenido de MathWorld-A Wolfram Web Resource: https://mathworld.wolfram.com/Minimum.html

Weisstein, E. (11 de Enero de 2021). *Proper Subset*. Obtenido de MathWorld- A Wolfram Web Resource: https://mathworld.wolfram.com/ProperSubset.html

Weisstein, E. (11 de Enero de 2021). *Ring*. Obtenido de MathWorld-A Wolfram Web Resource: https://mathworld.wolfram.com/Ring.html

Weisstein, E. (12 de Febrero de 2021). *Subfield*. Obtenido de MathWorld- A Wolfram Web Resource: https://mathworld.wolfram.com/Subfield.html

Weisstein, E. (11 de Enero de 2021). *Well Ordered Set*. Obtenido de MathWorld-A Wolfram Web Resource: https://mathworld.wolfram.com/WellOrderedSet.html

Wikipedia. (25 de Octubre de 2020). *Isomorfismo*. Obtenido de Teoría de cateogorías: https://es.wikipedia.org/wiki/Isomorfismo

Wikipedia. (13 de Marzo de 2020). *Mitscherlich's law*. Obtenido de Condensed matter physics: https://en.wikipedia.org/wiki/Mitscherlich%27s_law

Wikipedia. (26 de Octubre de 2020). *Order topology*. Obtenido de Order theory: https://en.wikipedia.org/wiki/Order_topology

Wikipedia. (31 de Enero de 2021). *Automorphism*. Obtenido de Morphism | Abstract algebra | Symmetry: https://en.wikipedia.org/wiki/Automorphism

Wikipedia. (10 de Enero de 2021). *Inverse element*. Obtenido de Abstract algebra: https://en.wikipedia.org/wiki/Inverse_element

Wikipedia. (2 de Febrero de 2021). *Minimal algebra*. Obtenido de Algebra: https://en.wikipedia.org/wiki/Minimal_algebra

World of Chemicals. (12 de Febrero de 2021). *Eilhard Mitscherlich – inventor of chemical isomorphism*. Obtenido de Articles: https://www.worldofchemicals.com/111/chemistry-articles/eilhard-mitscherlich-inventor-of-chemical-isomorphism.html#:~:text=Eilhard%20Mitscherlich%20%E2%80%93%20inventor%20of%20chemical%20isomorphism,-Biography%20%26%20contributions&text=Mitscherlich%20was