HACIA UNA INTERPRETACIÓN DIALÉCTICA-MATERIALISTA DE LA TOPOLOGÍA: GÉNESIS HISTÓRICA-TEÓRICA DE LA TOPOLOGÍA DESDE LA GEOMETRÍA Y LA TEORÍA DE CONJUNTOS

ISADORE NABI

Como se señala en (Ríbnikov, 1974, págs. 50-51), los registros históricos indican que las Matemáticas como cuerpo teórico bien definido nace en la antigua Grecia (muchos de esos griegos fueron a aprender Matemáticas a Egipto y Babilonia -como señala también Ríbnikov en los primeros dos capítulos de la obra citada-) de la mano de los filósofos griegos, inicialmente de la mano de Pitágoras de Samos. En palabras del autor citado "La parte teórica de las matemáticas tiene sus orígenes en las escuelas científicas y filosóficas de la antigua Grecia. La contribución de estas escuelas al desarrollo de la ciencia es tan significativa que incluso en nuestra época "las ciencias naturales teóricas, si quieren seguir la historia del surgimiento y desarrollo de sus tesis generales actuales, están obligadas a dirigirse a los griegos (…) Los trabajos de las ciencias naturales y filosóficos de los científicos antiguos llegados hasta nosotros y las informaciones sobre ellos muestran que en la Grecia Antigua se formaron los tipos fundamentales de concepciones del mundo, actuaron diferentes escuelas científico-naturales (…) Al mismo tiempo, ya en la escuela de Pitágoras se advierte un proceso de recopilación de hechos matemáticos abstractos y la unión de ellos en sistemas teóricos." Por ello, Pitágoras[1] es reconocido ampliamente como el primer matemático puro y, no por casualidad, los rumores históricos señalan que fue el primer hombre en llamarse a sí mismo como

[1] Sea él o su escuela, aquí no se pretende discutir sobre la verificabilidad de la existencia histórica (o no) de Pitágoras como ser humano concreto ni en qué medida teoremas de miembros de su escuela pueden haber sido atribuidos erróneamente a él (aún en el caso que existiese).

filósofo[2] y también el primero que elaboró las primeras demostraciones intuitivas, como señalan muchos historiadores y puede verificarse en (Kahn, 2001, pág. 33).

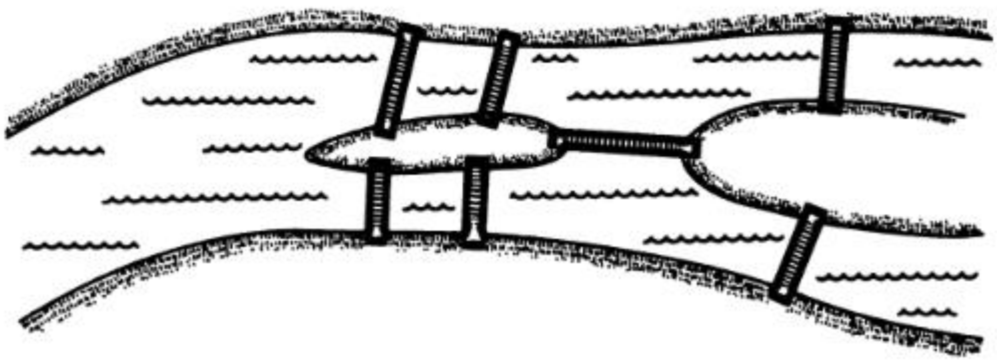
El nacimiento de la Topología como una disciplina matemática bien-definida, como se señala en (Croom, 2008, págs. 7-8), se remonta a los primeros años del siglo XX, sin embargo, áreas aisladas de esta disciplina pueden rastrearse varios siglos atrás. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) fue el primero en imaginar ***una geometría en la cual la posición, en lugar de la magnitud, fuera el factor de mayor importancia***. En 1676 Leibniz empleó el término "geometría situs" (geometría de la posición) a la hora de imaginar un tipo de cálculo vectorial similar a la topología que conocemos en la actualidad. La primera aplicación práctica de la topología fue realizada en el año 1736 por el matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783) y se explica a continuación.

En el siglo XVIII la ciudad prusiana Königsberg (ahora Kaliningrado, Rusia) estaba localizada en una isla ubicada sobre el río Pregel y en los bancos (en los mares, ríos y lagos navegables, bajo que se prolonga en una gran extensión) de los alrededores a dicho río y tal era la importancia del río que marcaba en aquella época una delimitación geográfica que dividía a la isla en *Nuevo Pregel* y *Viejo Pregel*[3]. La isla (compuesta por dos masas de tierra sobre el río y conectados entre sí directamente por un puente) y la tierra firme eran unidas por una red de siete puentes, como se muestra en la figura presentada a continuación.

---

[2] Esto se verifica en (Wikipedia, 2021), que a su vez se sustentan en los escritos históricos de Marco Tulio Cicerón, Heráclides Póntico, Diógenes Laercio y Jámblico, mientras que en (C.J. De Vogel, *Pythagoras and Early Pythagoreanism* (1966), pp. 97–102, and C. Riedweg, *Pythagoras: His Life, Teaching, And Influence* (2005), p. 92) como fuente perteneciente a la época actual.

[3] Aunque la importancia geográfica del río no parece haber menguado, los mapas de la ciudad presentados aquí difieren del estado actual de la ciudad (dos puentes no soportaron bombardeos durante la Segunda Guerra Mundial y otros dos fueron demolidos para ser sustituidos por una autopista moderna). Estos mapas muestran la ciudad en la época de Euler.



Esta interconexión mediante puentes era de interés para los turistas de domingo, puesto que muchos de ellos deseaban cruzar todos los ríos exactamente una vez en un viaje continuo único. Este fue quizás el primer problema de topología aplicada que se ha registrado en la historia y es claramente un problema topológico porque depende solamente de las posiciones relativas de los puentes y de las masas de tierra y no del tamaño de la isla o del largo de los puentes, es decir, es un problema ausente de métrica.

Siguiendo la lógica empleada por Euler para responder a la pregunta si el deseo de los turistas dominicales era realizable o no, reemplácese cada masa de tierra por un punto y cada puente por un segmento de la recta real. La configuración resultante del procedimiento anterior fue llamada por Euler *grafo*, en donde cada punto es un *vértice* y cada segmento de la recta real es una *arista*. El resultado se muestral a continuación.

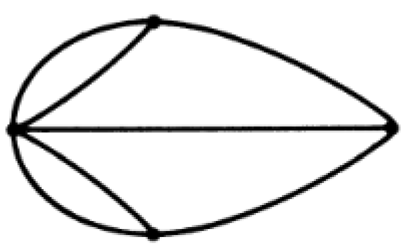


FIGURE 1.8 Graph for the Königsberg Bridge problem.

Otra forma visualizar gráficamente la construcción lógica anterior se presenta en (Wikipedia, 2020), la cual se presenta a continuación.

Euler llamó *vértice impar* a los vértices con un número impar de aristas y como *vértice par* a los vértices con un número par de aristas. Como puede observarse, cada vértice (masa de tierra) tiene tres aristas (conecta con tres puentes), por lo que todos los vértices son vértices impares. Nótese que las aristas (los puentes) entrelazadas por cada vértice impar (cada masa de tierra que conecta un número impar de puentes) pueden ser cruzadas exactamente una vez solamente si ese vértice es el inicio o es el destino final del viaje turístico; sin embargo, como existen más de dos vértices impares en este caso, Euler demostró que la ruta deseada era imposible de diseñar.

Euler trabajó en dar una solución general al problema de determinar el número de viajes continuos requeridos para atravesar exactamente una vez cada arista de un *grafo conexo* o también conocidos como *grafos conectados*. En esta generalización, el número de vértices impares también es un número par (en el problema analizado por Euler, se puede observar en las imágenes anteriores que son dos masas de tierra las que están conectadas por tres puentes) y si ese número es 0 o 2 el grafo puede ser recorrido en un viaje continuo y único que atraviese cada arista solamente una vez, mientras que si el número de vértices impares es mayor a 2, entonces el número de viajes continuos requeridos será un número igual a la mitad del número de vértices impares que posea el grafo estudiado.

Como se señala Croom, incluso Gauss (quien es ampliamente conocido por haber influenciado mucho la matemática moderna) predijo en 1833 que la "geometría de la localización" se convertiría en una disciplina matemática de gran importancia. De hecho, los estudios de Gauss sobre superficies cerradas como la esfera y el torus (que es una figura geométrica equivalente a la superficie de una rosquilla o dona) y superficies como las que se encuentran en el cálculo multidimensional, pueden considerarse un presagio de lo que modernamente se conoce *Topología General*[4]. Gauss también estaba interesado en los *nudos* (estudiar topológicamente los nudos que cotidianamente conocemos), que son de interés topológico en la actualidad.

Ahora hay que ir al siglo XIX y a inicios del siglo XX para comprender la génesis de la Topología como disciplina matemática bien definida. Como ya se dijo, las Matemáticas (junto con todas las ciencias) nacen como reflexiones filosóficas del estudio de la naturaleza llevadas a cabo por los filósofos y científicos de la Grecia Antigua, nacen bajo la forma de Geometría; tras muchos siglos las Matemáticas evolucionan lo suficiente como para que la comunidad matemática se plantee su axiomatización formal (el programa de Hilbert y el aporte de Gödel), tras la aparición de la teoría de conjuntos de Georg Cantor.

Los orígenes de la Topología como es conocida actualmente yacen en el concepto de dimensión. Como se señala en (James, 1999, págs. 1-23), el concepto de dimensión (derivado del entendimiento de las dimensiones del espacio físico) fue generalizado (y probado el significado de tal generalización) en el siglo diecinueve e inicios del siglo veinte. Las preguntas filosóficas correspondientes al significado de objetos de 4 dimensiones o más fueron apareciendo, lo que terminó por conducir principalmente a A.L. Cauchy (1789-1857), Arthur Cayley (1821-1895) y

[4] Topología General es la rama de la topología que estudia las definiciones y construcciones fundamentales elaboradas desde la teoría de conjuntos que son usadas en topología. La topología general puede verse como una conjunción armónica entre la Geometría y la Teoría de Conjuntos por las mismas características específicas de su proceso de alumbramiento, como se ha visto y se seguirá viendo en esta sección. Más adelante se brindará una definición más intuitiva.

Hermann Grassmann (1809-1877) al estudio la nueva estructura matemática surgida, del hiperespacio $n - dimensional$. Los geómetras de esa época aceptaron la noción intuitiva de dimensión sin mayor interés en probar matemáticamente la naturaleza misma del concepto de dimensión. Fue hasta que Georg Cantor en 1877 planteó que los puntos de un cuadrado (que son bidimensionales) pueden ser puestos en una correspondencia uno-a-uno con los puntos de un segmento cualquiera de la recta real (que es unidimensional) y con ello, Cantor complejizó a tal punto la intuición detrás del concepto de dimensión que este concepto fue centro de atención de la comunidad matemática de la época y preguntas más sofisticadas sobre la naturaleza de este concepto fueron puestas sobre la mesa, por ejemplo, ¿en qué sentido es el concepto de dimensión un invariante geométrico?, ¿pueden la dimensión de un espacio y la dimensión de su imagen en el contexto de un mapeo funcional ser diferentes?

Paradojas y contradicciones han retado a menudo a los matemáticos y tales retos los han conducido a investigar múltiples problemas. El resultado a largo plazo del resultado contradictorio en la investigación de Cantor (lo referente al concepto de dimensión) es la rama de la Topología conocida como *teoría de la dimensión*, específicamente la *teoría de la dimensión topológica*, que no es más que la teoría de la dimensión libre de consideraciones métricas (lo que puede entenderse intuitivamente como libre de consideraciones que involucren funciones distancia). Como se señala en la fuente citada, el problema teórico de definir el concepto (*i.e.*, ¿qué es una dimensión?) tiene sus orígenes en la antigua Grecia, específicamente con Euclides. Ahí, el gran geómetra establece una jerarquía dimensional dimensiones de forma rudimentaria, planteado que un punto es lo que no tiene partes, que una línea tiene largo, que una superficie tiene largo y ancho, mientras que un sólido largo, ancho y profundidad. En la misma línea, continuaron a lo largo de los siglos con este estudio Galilei Galileo (1564-1642), Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) e Immanuel Kant (1724-1804); sin embargo, aunque ellos abordasen de una u otra forma el concepto de dimensión, no se registran indicios de los cimientos fundacionales de una teoría moderna sobre las dimensiones de los objetos matemáticos. Las raíces históricas de la moderna teoría de la dimensión se encuentran en los trabajos de Bernard Bolzano (1781-1848), investigaciones íntimamente ligadas a la filosofía, como confiesa en mismo Bolzano en su autobiografía (citada por James): “Mi placer especial en las Matemáticas descansa en su parte puramente especulativa” y precisamente a causa de las preferencias puramente especulativas (porque la filosofía marxista es filosofía como praxis[5]) los resultados de las investigaciones de Bolzano fueron incompletos e insuficientes fundamentalmente desde la parte lógico-formal e imposibilitó el surgimiento formal de una moderna teoría de la dimensión; sin embargo, años después Bolzano retomaría sus escritos de juventud sobre la cuestión dimensional y complementaría sus reflexiones filosóficas con un cuerpo matemático profundo derivado de sus propios conceptos de *vecindario* y de *punto aislado*, convirtiéndose así en el geómetra más profundo de su época y sentado con ello las bases de la teoría de la dimensión topológica.

Posteriormente, fue en 1877 cuando Georg Cantor planteó que un objeto de una cantidad arbitraria de dimensiones podía ser puesto en una correspondencia uno-a-uno con un objeto de una cantidad menor de dimensiones, como se ejemplificó anteriormente.

Así, Cantor puso en tela de juicio la validez epistemológica de los fundamentos de la Geometría, principalmente aquellos realizados algunos años atrás por Bernhard Riemann (1826-1866) y Hermann Helmoltz (1821-1894) entre otros. En definitiva, tal y como el mismo Cantor logró ver, su resultado de la correspondencia uno-a-uno entre objetos de diferente dimensión de un golpe crítico (directo y devastador) al concepto de la dimensión como coordenada y mostró con contundencia que era necesario construir otro concepto de dimensión.

---

[5] Proceso mediante el cual un conocimiento se promulga, encarna y/o realiza.

Este enfoque dimensional de Cantor provenía de un novel territorio sin un vínculo explícito con la geometría: la teoría de conjuntos del propio Cantor que se encontraba en pleno proceso de construcción. Esto es así porque su perspectiva sobre el concepto de dimensión partía de sus trabajos sobre correspondencias uno-a-uno y cardinalidad (concepto matemático creado por Cantor para cristalizar la noción de tamaño de un conjunto). Esto hizo que naciera un enfoque completamente nuevo de la Geometría, el enfoque desde la teoría de conjuntos. Así, Cantor expresó que sus resultados podían extenderse de variedades $q-dimensionales$ hasta variedades de dimensiones infinitas, siempre que se asumiese que su cantidad de dimensiones infinitas tuviese la forma de una sucesión infinita simple (*i.e.*, el número de dimensiones es infinita numerable[6]). Los planteamientos de Cantor fueron tan heterodoxos que los editores de Crelle's *Journal* decidieron ignorar e incluso rechazar la investigación presentada por Cantor (porque según James la encontraron extraña[7]) y este hecho histórico señalado por James es también señalado por el célebre filósofo, historiador y sociólogo de la ciencia Imre Lakatos como parte de los ejemplos existentes de "monster-barring"[8], como se puede verificar en (Lakatos, 2015, pág. 15).

Cantor tenía 32 años y era indudablemente un revolucionario de las Matemáticas, mientras que Dedekind tenía 46 años y tenía cierto anclaje significativo a la ortodoxia matemática de la época, por lo que no estaba tan convencido como Cantor de que los cimientos de la Geometría estuviesen socavados. Por ello, mientras Cantor se limitaba a poner en duda lo que Riemann y compañía habían

---

[6] Un conjunto infinito numerable es aquel para el cual es posible establecer una función biyectiva con los números naturales, es decir, es un infinito que no es lo suficientemente grande para agotar "la cesta de números para contar", en donde esa "cesta" evidentemente está dada por los números enteros. Los conjuntos infinitos no-numerables pertenecen son los denominados por Cantor como *cardinales transfinitos*.

[7] Aquí el autor de la obra (redactada en inglés) utiliza "bizarre" que debe traducirse como "extraño" o "estrafalario", diferente de la palabra "bizarro" en español que significa "valiente", "valeroso" y afines (al traducirla al inglés debe traducirse como "gallant").

[8] Como se verifica en (Weisstein E. , Monster-Barring, 2021), este es un término acuñado por Imre Lakatos.

aportado, Dedekind pensó que no era posible que el trabajo de los matemáticos anteriores a ellos estuviese completamente equivocado y que los resultados de Cantor debían plantearse en términos tales que eviten echar por tierra los cimientos fundacionales de la Geometría aportados por Riemann y los otros; bajo esta filosofía planteó que la forma de lograrlo era incorporar el concepto de continuidad en el planteamiento buscado. Ello fue así porque en alguna medida Riemann y Helmholtz incluyeron los conceptos de continuidad (y con ello, de diferenciabilidad[9]) en su concepción de dimensión; de lograrse plantear así los resultados de Cantor, esto permitiría a los hallazgos matemáticos previos complementarse teóricamente con los hallazgos de Cantor. Lo anterior se debe a que así los resultados de Cantor serían simplemente un escenario analítico que, aunque construido para el estudio de los mismos objetos matemáticos, tendría condiciones (restricciones, si se quiere razonar bajo el lente de la teoría de la optimización) diferentes a las planteadas en los estudios de Riemann y los matemáticos anteriores, por cuanto serían diferentes casos contenidos dentro de una misma clase de casos, caracterizada por la misma naturaleza filosófica y teórica-matemática.

Esta consideración de Dedekind resulta aún más natural si se considera que precisamente fue Riemann, como señala (Croom, 2008, pág. 9), el primer matemático que vio la topología en un grado de generalidad similar al alcanzado en el presente; en la actualidad, como se verifica en (Weisstein E. , Point-Set Topology, 2021), la topología general es el estudio de la naturaleza general abstracta de la *continuidad* y *conexidad* en las estructuras matemáticas conocidas como *espacios*[10]. Riemann inició el estudio de la conexidad de superficies (la

---

[9] A nivel general, porque se está consciente que como casos singulares existen funciones y espacios de funciones continuas que son diferenciables en ninguna parte.

[10] Como se señala en (Weisstein E. , Space, 2021), "El concepto de espacio es una construcción matemática extremadamente general e importante. Los miembros del espacio obedecen a ciertas propiedades de adición. Los espacios que se han investigado y se han encontrado de como objetos matemáticos de interés suelen tener el nombre de uno o más de sus investigadores. Desafortunadamente, esta práctica conduce a nombres que dan muy poca información sobre las

localización espacial de los “hoyos” -puntos- que conforman una superficie); incluso también usó conceptos en que el número de dimensiones era superior a tres, que era en aquel momento el número máximo de dimensiones involucradas en el estudio de cualquier objeto geométrico. Así, Dedekind planteó que si alguien tiene éxito en configurar una relación uno-a-uno de completa correspondencia entre los puntos de una variedad continua A de a dimensiones y de una variedad continua B de b dimensiones, la correspondencia resultante de esta configuración necesariamente será discontinua siempre que a y b sean desiguales. Aunque Cantor reconoció la superioridad en el planteamiento de Dedekind, reconoció también posibles dificultades acechando en el fundamento teórico del teorema de invarianza dimensional propuesto por Dedekind. Tras los muchos teoremas aparecidos en diferentes medios entre 1877 y 1878, como resultado de la ventilación pública de la problemática que hizo Dedekind, Cantor no encontró un solo planteamiento sobre la línea de investigación planteada por Dedekind que lo terminara de convencer, por lo que decidió realizar uno propio. Así, expresó el teorema de invarianza geométrica en los siguientes términos: “Sobre un espacio continuo (*i.e.*, conectado) M_μ y otro espacio de la misma naturaleza M_v, en el caso en el que $\mu < v$, no existe una relación funcional *continua* tal que cada elemento de M_μ pertenezca a un solo elemento de M_v y que cada elemento de M_v pertenezca a uno o más elementos de M_μ.”

Cerca de 1880 la mayoría de matemáticos pensaban que los resultados contradictorios de Cantor sobre las dimensiones habían sido subsanados y la única voz crítica de ese momento (Enno Jürgens) fue, erróneamente, simplemente ignorada. Actualmente se sabe que este “teorema” de Cantor es falso, lo refuta la curva de llenado espacial de Peano; sin embargo, esto fue conocido hasta once años

---

propiedades relevantes de un espacio dado. El tipo de espacio cotidiano familiar para la mayoría de la gente se llama espacio euclidiano. En la teoría de la relatividad especial de Einstein, los tres espacios euclidianos más el tiempo (la "cuarta dimensión") se unifican en el llamado espacio de Minkowski. Uno de los tipos más generales de espacios matemáticos es el espacio topológico.”

después y para ese momento la situación en la formación de la topología y la teoría de la dimensión había cambiado considerablemente, al punto en que no permitió, de alguna forma, que evitó que la refutación contenida en el trabajo de Peano recibiera atención y ello se desprende del hecho de que durante los últimos veinte años del siglo XIX la idea aceptada entre los matemáticos de la época era que la cuestión relativa a la invariancia dimensional había sido rigurosamente determinada.

El surgimiento de la teoría de conjuntos cantoriana trajo aires frescos al pensamiento topológico de la época. En el estudio de Cantor de conjuntos lineales de puntos[11] y los conjuntos de puntos (conjuntos cuyos elementos son puntos) en un continuo aritmético $n - dimensional$[12], el concepto fundamental es el de *punto límite*. El teorema subyacente a este planteamiento es el célebre *teorema Bolzano-Weierstrass* el cual establece lo siguiente:

"***Todo conjunto infinito de puntos en una región acotada de un espacio*** $\boldsymbol{n - dimensional}$ ***posee al menos un punto límite.***"[13]

---

[11] Según la investigación bibliográfica y las traducciones realizadas por el profesor emérito de la Cleveland State University, un conjunto lineal de puntos (término proveniente de la obra en francés "L'hypoth èse du continu" de Sierpinkski, que ahí aparecen con el nombre "ensembles linéaires") es un concepto definido como un subconjunto del continuo, *i.e.*, de la recta real. Lo anterior puede verificarse en (Scott, 2013).

[12] Esta es la forma en que el autor de la investigación anteriormente citada se refiere a los espacios euclidianos $n - dimensionales$.

[13] Un punto límite es, según (Weisstein E. , Limit Point, 2021), en el escenario de una relación entre x y y, un número x tal que para todo número $\epsilon > 0$ tan pequeño como se desee existe un miembro del conjunto y diferente de x tal que la distancia entre y y x es menor a ese número épsilon, *i.e.*, $|y - x| < \epsilon$; mientras que la definición topológica de un punto límite P de A es que P es un punto límite de A siempre que todo conjunto abierto alrededor de P contenga al menos un elemento de A que sea diferente de P; nótese que esta definición de punto límite implica que, en realidad, la región está delimitada por al menos dos puntos, lo que a su vez parece buscar cristalizar la noción de que un conjunto abierto sólo se puede definir en función de otro (lo que a su vez tiene que ver con el hecho de que todo cuanto existe se define en términos de su contrario y este es un principio fundamental de la dialéctica de Marx). Una región, en el contexto de la topología, es un conjunto abierto conexo (también conocido como dominio -sí, en referencia al dominio de una función-), tal y como se verifica en (Weisstein E. , Region, 2021); mientras que en el contexto del análisis matemático, una región es usualmente un subconjunto de los reales o de los complejos que es abierto (en el sentido de la topología euclidiana estándar), simplemente conexo y no vacío (a veces se usa el concepto de *región cerrada* y se define como la clausura topológica de una región -lo que

De este concepto fundamental y del teorema en que se cristaliza fluyó la profunda concepción teórica cantoriana de los conjuntos de puntos: las nociones de conjunto derivado[14], conjunto denso en todas partes[15], conjunto denso en ningún lado[16], conjunto de puntos aislados[17] y el conjunto tercero excluido o conjunto de Cantor[18].

Introduciendo las nociones anteriores, Cantor abrió un nuevo campo de estudio. El análisis matemático fue el primer campo de las Matemáticas que se vio beneficiado de los descubrimientos de Cantor, puesto que la teoría de conjuntos que este elaboró ofrecía nuevos instrumentos para estudiar minuciosamente la naturaleza de las funciones, lo que condujo al desarrollo tanto del análisis funcional (tanto de funciones real evaluadas como funciones de variable compleja) en los años posteriores a las publicaciones de Cantor; sin embargo, la aplicación de las herramientas cantorianas en la geometría se hizo esperar un tiempo, hasta la llegada de Camille Jordan (1838-1921) y Giuseppe Peano (1858-1932).

Jordan y Peano fueron de los primeros matemáticos que implementaron las ideas cantorianas en los dominios de la geometría y su trabajo tuvo una robustez tal que se terminó por convertir en el cimiento teórico sobre el cual se edificó la Topología General. Tanto Jordan como Peano abordaron el problema desde la perspectiva de la medida y la integración, con resultados destacablemente similares. Ambos

---

implica el uso de conceptos topológicos dentro del mismo análisis matemático-), tal y como se verifica en (Wikipedia, 2020). Los conceptos dados desde la topología y desde el análisis matemático son equivalentes. Finalmente, queda claro que los conceptos de punto límite y de región están íntimamente relacionados y que de alguna forma no pueden existir sin el otro y tienen su génesis en la búsqueda de una delimitación sin ambigüedades de los objetos matemáticos (por ello es que la teoría de conjuntos, que precisa de relaciones sin ambigüedades entre puntos, parte de ese teorema -y no es casualidad, considerando que tuvo como supervisor doctoral al mismísimo Weierstrass-).

[14] Un conjunto derivado de un subconjunto S de un espacio topológico es el conjunto de todos los puntos límite de S y se denota, por lo general, mediante S'. Sobre esto se expandirá en la siguiente sección.

[15] Esto se estudió en el tópico de los espacios euclidianos separables, correspondiente a la sección IV.I.I. que versa sobre algunos conceptos fundamentales del análisis matemático.

[16] Esta definición se brindará en la siguiente sección.

[17] Esta definición se brindará en la siguiente sección.

[18] Sobre este conjunto se habló extensamente en la sección referente a teoría de conjuntos.

matemáticos vieron la necesidad de aplicar la teoría de conjuntos de Cantor a las nociones intuitivas de la geometría. Entre los topólogos de la actualidad Camille Jordan es conocido principalmente por su célebre teorema sobre las curvas cerradas en el plano, el cual establece que:

*"**Toda curva continua C divide el plano en dos regiones, una región exterior, otra región interior; esta última no puede ser reducida a cero porque contiene un círculo de radio finito.**"*

Por otro lado, el aporte de Peano consistió en la ya mencionada curva de llenado espacial (en la literatura en inglés aparece como "space-filling curve" o "space-filling function"). La función de llenado espacial presentada por Peano, mediante la cual los puntos $x(t)$ y $y(t)$ (pertenecientes al intervalo unitario) se "enlazan y rellenan" (*i.e.*, se ponen en una relación sobreyectiva o exhaustiva[19]) el cuadrado unitario (cuadrado cuyos lados son de longitud unitaria -independientemente de las unidades de medida de las que se trate-). La forma concreta en que el trabajo de Cantor inspiró las investigaciones de Peano tiene que ver con que Cantor había llegado a un resultado que indicaba que el intervalo unitario y el cuadrado unitario eran conjuntos de la misma cardinalidad o dimensión topológica[20] (resultado profundamente contraintuitivo para la época) y, como se dijo anteriormente, la investigación de Cantor hizo que la comunidad matemática de la época pusiera su atención sobre el tema de la invariancia dimensional (aunque para cuando apareció el trabajo de Peano -once años después- se consideraba que el tema estaba completamente subsanada, como se mencionó anteriormente) y fue esto lo que terminó por conducir a Peano a investigar la relación existente entre espacios con diferente número de coordenadas (para esa época, las coordenadas eran sinónimo

[19] Una relación funcional sobreyectiva o exhaustiva es aquella en el que al menos un elemento del conjunto de entrada que contiene a los $x \in X$ le corresponde a cada elemento del conjunto de salida que contiene a los $y \in Y$; en otras palabras, una función es sobreyectiva o exhaustiva cuando cada elemento $y \in Y$ es la imagen de al menos (*i.e.*, como mínimo) un elemento $x \in X$.
[20] Igual a 1, como puede verificarse en (Olalquiaga & Olalquiaga, 2005, pág. 55).

perfecto de dimensiones, hasta que el trabajo de Cantor asestó un golpe crítico a esa creencia).

Así continuó la evolución de la Topología General hasta la primera década del siglo XX, cuando algunos prominentes matemáticos concibieron una variedad de ideas nuevas sobre el concepto de dimensión, especialmente Henri Poincaré (1854-1912), René Baire (1874-1932), Maurice Fréchet (1878-1973) y Frigyes Riesz (1880-1956). Era natural que Poincaré, cuyas ideas contribuyeron significativamente a dar a luz a la Topología Algebraica moderna (de hecho, es considerado, como puede verificarse en (Lambrechts, 2009, pág. 2), el padre de la topología algebraica[21]) se interesara por estudiar el problema de la dimensión topológica. El interés de Poincaré nacía no de sus investigaciones matemáticas sino de sus investigaciones filosóficas sobre los orígenes y la naturaleza del conocimiento geométrico, así como también de la relación existente a nivel filosófico entre la geometría y el espacio observable en la realidad. Como señala (James, 1999, pág. 12), él propuso una definición de dimensión topológica porque estaba tratando con preguntas cosmológicas o, como señala el autor, sería más preciso decir que trataba con cuestiones epistemológicas (en el sentido ya definido en esta investigación), no por cuestiones matemáticas. Las investigaciones filosóficas de Poincaré orbitaban alrededor de tres grandes ejes:

1. El problema de explicar de las varias geometrías (euclidiana y no euclidiana) a "nuestro espacio" (el espacio observable en el mundo real).
2. El problema de explicar el origen de las ideas fundamentales que la humanidad tiene sobre el espacio y la geometría.
3. El problema de explicar por qué la humanidad concibe el espacio en el que existe como un espacio de tres dimensiones.

[21] Como se verifica en (Lambrechts, 2009, pág. 2), la topología algebraica es la teoría matemática que versa sobre la distinción de las formas de los objetos geométricos mediante cómputos algebraicos (*i.e.*, cálculos de carácter algebraico).

Estas investigaciones filosóficas dieron nacimiento a dos teorías matemáticas. La primera desarrollada en la década de 1890 con base en la teoría de grupos[22] (que es la que dio nacimiento a la topología algebraica) y 1901 su segunda teoría sobre las dimensiones estrictamente topológicas y que posteriormente dio nacimiento a la rama de las Matemáticas conocida como teoría de la dimensión.

Según (James, 1999, pág. 12), aunque las primeras teorizaciones de Poincaré eran matemáticamente adecuadas, filosóficamente no lo eran puesto que la teoría de grupos durante las cercanías al siglo XX ya era una construcción teórica que unificaba varias teorías matemáticas, por lo que comprender el significado filosófico desde ella era muy poco directa y, por tanto, ineficiente desde la perspectiva filosófica. Aquí considera el autor de la presente investigación que James confunde "muy poco directo" (él lo plantea en inglés como "roundabout") con muy poco armonizado-estandarizado. Lo que se quiere decir con lo anterior es que no se debe esperar que la respuesta a una pregunta filosófica de la complejidad como las que investigaba Poincaré sea simple en sí misma, así como tampoco que su estructura no contemple múltiples etapas o momentos; el problema con una respuesta como la dada por Poincaré [quien afirmaba que la tridimensionalidad de nuestro espacio como una representación espacial de grupos euclidianos de movimientos rígidos actuando en los subgrupos del espacio de rotación conjugado (lo que claramente es una definición que Poincaré construye inspirado en los sistemas dinámicos de diversa naturaleza estudiados en la Física - y modernamente en otras ciencias naturales y sociales- y en la teoría de grupos perteneciente al álgebra abstracta)] es que sólo es posible de validar filosóficamente si en primer lugar se valida en general el sistema filosófico de Poincaré[23] (que como

[22] El subcampo del Álgebra Abstracta que estudia el objeto matemático conocido como grupo y estudiado en la sección IV.I.I.

[23] Según (Rosental & Iudin, 1971, pág. 366), "Poincaré se ocupó mucho de las cuestiones de metodología general de la ciencia; consideraba que las leyes de la ciencia no pertenecen al mundo real, sino que constituyen acuerdos convencionales (convenciones) que han de hacer más cómoda y útil (en consonancia con el "principio de la economía del pensamiento" de Mach) la descripción de los fenómenos correspondientes. Según palabras de Lenin, "La esencia de la 'original' teoría de

se verifica en la nota al pie anterior, no se valida) y, en segundo lugar, si al hacer la validación antes mencionada, la reflexión de Poincaré es coherente con tal sistema o, alternativamente, si aunque no fuese coherente con tal sistema fuese posible plantearla con un nivel de claridad suficiente para que sea posible determinar si es coherente con los fundamentos de las ciencias de la que proviene y, además, si tal hibridación teórica resulta intuitiva y lógica en términos de los registros históricos de un determinado fenómeno a analizar y del mundo físico observable[24] (lo que tampoco parece tener una respuesta afirmativa); además, James señala acertadamente que Poincaré plantea una definición para una estructura de tres dimensiones y no para lo que es una dimensión en sí misma, sin embargo, a criterio del autor de esta investigación, a diferencia de lo que parece querer implicar James, esto no es un problema epistemológico en sí mismo, aunque el hecho que Poincaré no establezca explícitamente (ni implícitamente, a juzgar por lo planteado por James) por qué dio una definición para tres dimensiones y no para una dimensión, si eran equivalentes las definiciones o no (para una y tres

---

Poincaré se reduce a la negación… de la realidad objetiva y de las leyes objetivas de la naturaleza" (t. XIV, pág. 152, "Materialismo y empiriocriticismo", E. P. U., 1959M Montevideo, pág. 176). El *convencionalismo* de Poincaré constituye una de las variedades del *idealismo físico*. Poincaré fue uno de los precursores de la corriente intuicionista (constructiva) de la matemática." Con respecto a lo anterior deben decirse tres cosas. La primera es que desde la perspectiva Marxista la visión filosófica de Poincaré [se le llama "visión filosófica" porque Poincaré no llegó a construir nunca un sistema filosófico propio (como suele ser común entre los científicos, que navegan en un peligroso eclecticismo filosófico no siempre de forma consciente y no siempre con sus engranes interconectados (independientemente la interconexión sea coherente o presente signos de "displasia teórica")] es una concepción del mundo profundamente equivocada. La segunda es que desde la perspectiva marxista el constructivismo es la visión filosófica de las Matemáticas correcta, por lo que el aporte de Poincaré es filosóficamente valioso (a pesar de que el intuicionismo es una corriente idealista de la Filosofía de las Matemáticas -entiéndase aquí por idealista en el sentido de la cuestión fundamental de la Filosofía-); lo anterior no sólo se afirma como criterio del autor de esta investigación, sino también se puede verificar en (Rosental & Iudin, 1971, pág. 247) y en (Rosental & Iudin, 1971, págs. 277-278). La tercera cuestión tiene que ver con la segunda, puesto que no es precisa la referencia de la página 176 de la fuente referida debido a que precisamente intuicionismo no es equivalente a constructivismo (o lógica constructiva), únicamente es su génesis (el padre y la madre son la génesis del hijo, pero no por ello son equivalentes) y esta imprecisión es subsanada por los autores soviéticos en las páginas 247 y 277-278 que se citaron previamente.
[24] Que no debe confundirse con la esencia de los fenómenos, con *Lo Real*, puesto que lo real es esquivo, es eso que se resiste al pensamiento. Ello se abordará en la sección titulada "EPISTEMOLOGÍA MARXISTA".

dimensiones) ni el porqué de ello (de la equivalencia o no-equivalencia) claramente sí es un problema epistemológico.

Las investigaciones filosóficas sobre el concepto de dimensión realizadas por Poincaré continuaron hasta que en 1903 (con base en un ensayo de su autoría en 1898) planteó una explicación novedosa sobre el concepto de dimensión en su investigación *L'Espace et ses trois Dimensions* (que puede traducirse del francés como "El Espacio y sus tres Dimensiones"), la cual se presenta a continuación:

"*Si para dividir un continuo es suficiente considerar como cortes cierto número de elementos todos distinguibles entre sí, decimos entonces que este continuo posee **una dimensión**; si, por el contrario, para dividir el continuo es necesario considerar como cortes un sistema de elementos formando ellos mismos uno o más continuos, entonces decimos que este continuo es de **varias dimensiones**. Si para dividir un continuo C, cortes de uno o más continuos de una dimensión bastan, debemos decir que C es un continuo de **dos dimensiones**; si cortes que forman uno o más continuos de a lo sumo dos dimensiones bastan, debemos decir que C es un continuo de **tres dimensiones**.*"

Como puede observarse, la validez epistemológica de la definición de Poincaré depende enteramente del concepto teórico *corte*. ¿Qué es un corte?, de forma sintética es posible decir que un corte o más precisamente un *punto de corte es un punto dentro de un espacio conexo tal que remover este punto del espacio ocasiona que el espacio resultante sea no-conexo*; por ejemplo, todo punto de una línea es un punto de corte, mientras que ningún punto de un círculo es un punto de corte[25] y de ello se desprende que la noción teórica del concepto punto de corte proviene indirectamente de la noción intuitiva de la conexión entre masas de tierra a través de puentes en el caso de aplicación al que se enfrentó uno de los grandes héroes de las Matemáticas en la otrora Prusia, sobre ello se expandirá a continuación.

[25] Véase (Wikipedia, 2019).

Asúmase que la estructura geográfica de la ciudad prusiana Königsberg hubiese sido de tal forma en que la ruta turística deseada (un circuito hamiltoniano[26]) hubiese sido posible de encontrar. Puesto que cada masa de tierra es un punto, evidentemente al retirar alguna de las masas de tierra la localización geográfica antes definida como continua (definida arquitectónicamente mediante el plano presentado con antelación, mientras que se dice continua en el sentido en que se puede llegar desde un punto cualquiera hasta cualquier otro punto -con independencia si se pasa una sola vez) queda desconectada y aquí debe entenderse por desconexión exactamente lo mismo que en Matemáticas: no habría sido posible para los turistas dominicales (o quien sea o lo que sea) ir desde cualquier masa de tierra hasta otra dentro de la localización definida por los mapas de la Königsberg de 1736 (tomando en consideración la hipótesis de trabajo que para desarrollar este ejemplo se asumió: existe una ruta turística de tipo circuito hamiltoniano) si las autoridades de Königsberg de la época hubiesen decidido cerrar temporalmente al público alguno de los islotes (o los masas de tierra firme) que conformaban la ciudad, si por obra de La Providencia alguno de los islotes desapareciese (o las masas de tierra firme, para plantearlo en términos más inverosímiles) o si ocurriese algún otro hecho similar a los dos antes descritos.

Como señala (James, 1999, pág. 13), "Poincaré distingue muy claramente entre el problema matemático principal y el problema cosmológico o epistemológico de explicar por qué atribuimos tres dimensiones a nuestro espacio. La característica notable de la nueva teoría para definir una dimensión matemática es que es una *teoría topológica*, basada en la noción de corte (*coupure*)." Sin embargo, el autor de

[26] Como se verifica en (University of Cambridge, 2021), para que la ruta turística que se plantease pudiese considerarse continua (en el contexto de Königsberg en 1736 o en contextos similares) debe cumplirse alguna de las siguientes condiciones: 1) la ruta cruza cada puente una sola vez y se regresa al punto de partida (es un circuito que recorre los puentes), 2) la ruta cruzada cada uno de los puentes solamente una vez, pero no retorna al punto de partida (es un camino que recorre los puentes), 3) la ruta pasa por cada una de las islas exactamente una vez y regresa a su punto de partida (conocido como *circuito hamiltoniano*, que habría sido la ruta turística ideal para el caso que enfrentó Euler).

esta investigación considera necesario resaltar el hecho que, a pesar de la claridad en esta distinción entre matemática y epistemología, Poincaré (consciente o no) estableció una definición que además de ser matemáticamente inequívoca (libre de ambigüedades) también lo es filosóficamente: ***una dimensión es simplemente el número de elementos dentro de un sistema que sirven para conectar de forma analíticamente integrada[27] las partes del todo que tal sistema representa.*** Por supuesto, esta definición base evolucionará en función del contexto teórico (no sólo teórico-matemático, teórico en general), sin embargo, su núcleo está perfectamente definido. Hasta aquí la brillante contribución de Poincaré.

Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966) no sólo fue fundador de la Escuela Intuicionista (de la que Poincaré fue precursor, por cierto) en el contexto de la Filosofía de las Matemáticas, sino que también fue una figura dominante en la nueva topología desarrollada en el alba del siglo XX. Sin embargo, Brouwer concebía la topología de forma diferente a Poincaré, puesto que las concepciones filosóficas de Brouwer habían nacido fundamentalmente dentro de la teoría matemática (mientras que las de Poincaré eran multidisciplinarias -de hecho, Poincaré es considerado el último gran polímata de las ciencias formales-) y sus inclinaciones filosóficas no eran tan generales como las de Poincaré, por lo que él se enfocó en la topología como un todo (y no solamente en el concepto de dimensión, aunque evidentemente este concepto es central en la topología) y trabajó en ella utilizando las herramientas que brindaba la teoría de conjuntos (que para ese momento ya estaba más desarrollada que cuando Poincaré se acercó a ella -aunque Poincaré nunca profundizó en el estudio fundacional de la geometría que en ese momento se estaba gestando, al menos no directamente ni con intenciones matemáticas, como ya señaló antes James-) y por ello Brouwer pudo conducir la topología a nuevos horizontes teóricos con sus construcciones teóricas sobre mapas

[27] "Dicho de diversas personas o cosas: Constituir un todo." (Real Academia Española, 2021).

funcionales, sobre el grado de un mapa funcional continuo[28] y, por supuesto, sobre el concepto de dimensión.

Cuando Brouwer estaba comenzando su carrera como matemático la topología general estaba en un estado de desarrollo primitivo, sin mencionar que la controversia rodeaba a la teoría de conjuntos de Cantor (que proporcionaba por antonomasia las herramientas para la topología general, como se dijo anteriormente) a causa de sus paradojas y contradicciones teóricas. La teoría de conjuntos había sido aplicada ampliamente en análisis matemático y con un poco menos de difusión en la geometría, pero en ningún caso había alcanzado el carácter de teoría unificada. Precisamente por ello su tesis doctoral *On the Foundations of Mathematics* marcó el verdadero inicio de su carrera como matemático. Por supuesto, Brouwer no tardó en descubrir que sus ideas intuicionistas sobre las Matemáticas generarían controversia y generarían rechazo en la comunidad matemática de la época, lo cual también comenzó con su tesis doctoral, puesto que su supervisor doctoral (D. J. Korteweg, 1848-1841) no estuvo en lo absoluto complacido con los aspectos más filosóficos de la tesis de Brouwer e incluso reporta (James, 1999, pág. 14) que Korteweg incluso solicitó que muchas partes del manuscrito original de Brouwer fueran removidas de la presentación final y, no limitándose a eso, aconsejó a Brouwer que se concentrara más en matemática "respetable", con la finalidad (a criterio de Korteweg) de que quizás el joven matemático pudiese mejorar su reputación matemática y así asegurar una carrera académica… a veces no es aconsejable seguir consejos, a veces hay gente que sigue el consejo anterior. Cosas de la vida.

Brouwer era, según lo describe James, de personalidad "fieramente independiente" y, por consiguiente, no permitiría que nadie le marcara la pauta de sus investigaciones; sin embargo, a pesar de ello, no era ingenuo y comprendió que la valía del consejo de su asesor residía en realidad en el hecho de que el

[28] Este concepto se definirá en la siguiente sección.

acontecimiento suscitado era una prueba fehaciente de que si quería tener una reputación matemática a tal nivel que le permitiese realizar una carrera académica (como matemático teórico), "a pesar" de sus concepciones filosóficas y matemáticas (por cuanto entraban en flagrante contradicción con las concepciones filosófico-matemáticas de la época), tenía que demostrar de alguna manera que la Matemática Pura no representaba ningún obstáculo intelectual para él.

Y así fue, en una demostración de prodigioso esfuerzo, publicó más de 40 investigaciones de gran relevancia en menos de cinco años, las cuales versaban fundamentalmente sobre teoría de grupos continuos y topología.

Sin embargo, regresando a la época de Brouwer como estudiante doctoral, un 12 de octubre de 1909 el joven Brouwer realizó su lectura inaugural[29] como profesor privado[30] en la Universidad de Ámsterdam, contando apenas con 28 abriles sobre sus espaldas (¡lo consiguió!, ¡empezó su carrera como académico!). Brouwer empezó por estudiar grupos relacionados por mapeos funcionales uno-a-uno, y

[29] "Lecture" es equivalente a lo que en América Latina se conoce como una clase universitaria.

[30] Como se señala en (Wikipedia, 2021), el profesor privado es un tipo de profesor académico que existió universidad de los Países Bajos y Bélgica. En Alemania, la docencia privada sigue siendo común hoy en día después de haber obtenido el estado de habilitación para un nombramiento como profesor. En Austria, la enseñanza privada se introdujo en 2003 para distinguir entre académicos que tienen tanto la habilitación como un nombramiento en una universidad, y los académicos que solo tienen la habilitación y no tienen un nombramiento. En los Países Bajos, la transferencia a un puesto académico regular fue menos común. Los profesores privados podían dar clases en una universidad sobre una materia que aún no se impartía, pero cuya importancia se reconocía. Por ejemplo, los nuevos campos académicos generalmente se enseñaron primero a profesores privados antes de que la universidad tomara la iniciativa de nombrar a un profesor o profesor especial. La enseñanza privada se inició con una solicitud a la universidad y, finalmente, la admisión se realizó mediante real decreto (Países Bajos) o decreto ministerial (Bélgica). La enseñanza privada comienza con una lección pública, que generalmente explica el propósito y la estructura de conferencias posteriores. El puesto de profesor particular estuvo sin sueldo por un período de cinco años, después del cual se podría prorrogar a pedido. En el gran auditorio del edificio de la academia de la Universidad de Leiden, hay una sala separada con la inscripción "Profesores privados". Finalmente, el profesor particular debe distinguirse del tutor. Aunque el tutor brinda educación privada, no está afiliado a la Universidad. Las lecciones de un tutor tampoco son gratuitas. A diferencia del profesor particular, el tutor todavía existe en los Países Bajos (y otros países, como Alemania).

conjuntos de puntos en el plano y en espacios de más dimensiones, lo que lo condujo hacia el *analysis in situs*, la naciente Topología.

Comenzando sus investigaciones planteándose clasificar los grupos relacionados por mapeos funcionales uno-a-uno, Brouwer fue planteándose el estudio de problemas más difíciles en la topología. Así, terminó por arribar al problema que se había dado por solventado referente a la posibilidad de que existiese una función biyectiva y continua de un dominio $m - dimensional$ a un dominio $n - dimensional$ cuando $m \neq n$… y encontró la solución, la cual fue apareciendo progresivamente.

Alrededor de 1910, tras la publicación previa de algunas investigaciones de su autoría que buscaban demostrar la invariancia de la dimensión topológica, Brouwer descubrió y demostró (lo que publicó en su investigación "Proof of the invariance of dimension number") que al menos los espacios pares no pueden ser relacionados mediante mapeos funcionales continuos biyectivos con los espacios impares (y a la inversa también es verdadero), como puede verificarse en (James, 1999, pág. 16). Esta última investigación fue, a pesar de contar apenas con 5 páginas, categóricamente superior a las investigaciones previas que habían buscado demostrar la invariancia de la dimensión topológica.

El planteamiento de Brouwer se basaba en un lemma[31] simple, sin embargo, muy poderoso. Sin embargo, para comprender este lemma de forma fluida es necesario comprender previamente el concepto de punto interior, que debido a su importancia se aborda en la siguiente sección, por lo que se recomienda al lector dirigirse allá a estudiar el concepto y luego regresar a esta lectura.

El lemma en cuestión establece, sin usar lenguaje formal (aunque sin perder formalidad), lo siguiente:

[31] Como se señala en (Weisstein E. , Lemma, 2021), un lemma es un teorema corto y, por ello, se entiende por aquel teorema que sirve para demostrar un teorema más amplio.

"Imagen de un cubo unitario $\boldsymbol{C}$ (un cubo con aristas de longitud 1) puesto en una relación funcional continua $\boldsymbol{f}$ consigo mismo, considerando que $\boldsymbol{f}$ tiene la propiedad de realizar transformaciones sobre los elementos de $\boldsymbol{C}$ tales que desplazan a cada uno de estos elementos (puntos) dentro del espacio en menos de $\frac{1}{2}$ unidades métricas, posee un punto interior."

El lector seguramente encontrará contradictorio el teorema anteriormente expuesto con lo planteado algunos párrafos atrás (y seguramente no le adjudica la culpa al gran Brouwer, sino a este humilde expositor), puesto que se dijo que en el análisis topológico no entraban en consideración cuestiones métricas. Sin embargo, la investigación de Brouwer no era una investigación puramente topológica, por el contrario, como señala (James, 1999, pág. 16) citando a su vez a Hans Freudenthal (un célebre matemático judeo-alemán que realizó contribuciones fundamentales en la topología) fue precisamente esa investigación la que dio luz a una rama híbrida de la Topología conocida como *Topología Algebraica*. Hans Freudenthal relizó contribuciones fundamentales precisamente en topología algebraica, manifestando sobre el escrito de Brouwer que marcó el nacimiento de: "(…) el paradigma de un método completamente nuevo y muy prometedor, ahora conocido como topología algebraica (…)".

Epistemológicamente hablando, se necesita estudiar aisladamente la localización de los puntos (que es el fundamento de la estructura interna de la figura geométrica), aunque en última instancia tal estudio sólo tenga sentido en el contexto de espacios que también están provistos con métrica (con una función distancia que permite establecer la distancia entre dos elementos), es parte del proceso de abstracción necesariamente empleado por las ciencias con el fin de profundizar más en la esencia de los objetos, como se verifica en (Rosental & Iudin, 1971, pág. 1).

Comprendido lo anterior, es posible continuar con el relato. Con el lemma anteriormente mencionado, Brouwer planteó los siguientes dos teoremas:

Teorema 1: Un dominio $\mathbf{m-dimensional}$ no puede contener una imagen continua uno-a-uno de un dominio con número de dimensión mayor.

Teorema 2: En una variedad $\mathbf{m-dimensional}$ la imagen continua uno-a-uno de un domino con número de dimensión menor es un conjunto denso en ninguna parte.

El gran matemático francés Henri Lebesgue (1875-1941) planteó una definición diferente de dimensión desde la Teoría de la Medida. La demostración matemática de Lebesgue no era del todo robusta y, definitivamente, no era fundada (planteada en términos de la teoría de conjuntos). Ambas respuestas, la de Brouwer y la de Lebesgue, se publicaron en la misma revista (en *Annalen*) por decisión del editor de la revista (Otto Blumenthal, 1876-944), debido a que previo a la publicación de la revista él conoció personalmente a Lebesgue y al manifestarle que Brouwer estaba demostrando lo mismo que él, puedo ver que Lebesgue no se acongojó ante la revelación (puesto que ya se sabía que Brouwer venía trabajando tiempo atrás exitosamente en el problema de definir el concepto de dimensión), lo que aunado seguramente también al hecho la reputación matemática de Henri Lebesgue para ese entonces (su teoría de la medida se había publicado desde 1902, el período histórico de análisis actualmente es 1910, ocho años habían transcurrido desde entonces), tomó la decisión de que se publicasen ambas investigaciones.

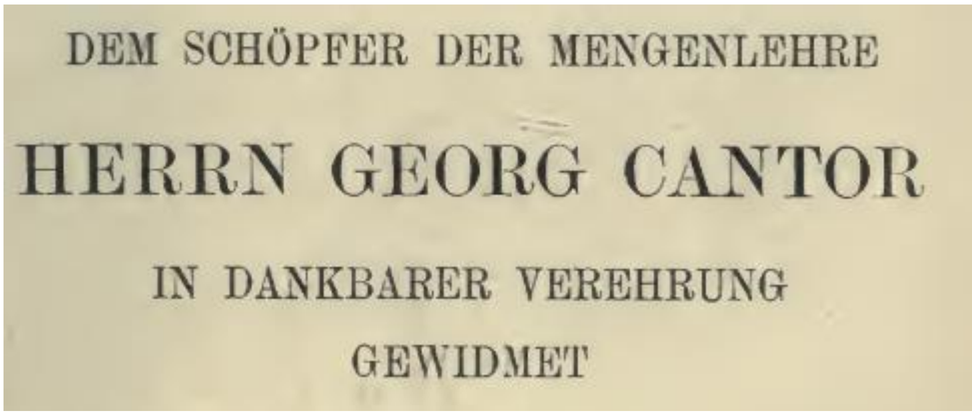
La demostración de Brouwer era más formal y compleja, mientras que la de Lebesgue era floja y esto motivó a Brouwer, que sintió desafiada su propia demostración y con ello seguramente su trabajo sobre los problemas gemelos de la topología (definir el concepto de dimensión y probar su invariancia), a exigirle públicamente (en diversas revistas de investigación) a Lebesgue que publicara una demostración formalmente rigurosa (con una actitud lo suficientemente hostil que condujo a romper relaciones con Lebesgue), aun cuando ya su relación personal estaba rota; sin lugar a dudas la actitud de Brouwer hacia Lebesgue es inexorablemente errática, sin embargo, tiene su explicación en el hecho de que si Brouwer no se ganaba una reputación como topólogo (que sólo podía llegar si planteaba una solución a los problemas gemelos que fuera superior a todas las demás) no podría construir una carrera académica lo suficientemente estable que le permitiera dedicarse al estudio de la Filosofía de las Matemáticas y a fundar el Intuicionismo, que era su verdadero deseo, por lo que demostrar una superioridad categórica frente al padre de la teoría de la medida, que además estaba opacando (evidentemente involuntariamente) los descubrimientos de Brouwer, era la guinda perfecta para probar a la comunidad matemática su capacidad como matemático. Así, Brouwer no se conformó con desafiar a Lebesgue a que presentara una prueba rigurosa de su principio, sino que además trabajó él mismo en una prueba que, tras intentos infructuosos, también consiguió alcanzar y, con ello, consiguió consagrarse como el padre de la topología moderna[32], la cual tuvo como principales contribuyentes a Leibniz, Euler, Cantor, Peano, Lebesgue, Hausdorff. La demostración de Lebesgue llegaría casi una década más tarde y en la actualidad la disputa entre Brouwer y Lebesgue dio como resultado lo que se conoce como el *Teorema de Brouwer-Lebesgue* o *Teorema del Mosaico*[33].

Finalmente, en este paseo dialéctico por la historia de la topología, es necesario destacar el aporte de Felix Hausdorff (1868-1942). Alrededor del período en que Brouwer publicó sus investigaciones más importantes sobre los problemas gemelos de la topología, la teoría de conjuntos y la topología general se desarrollaron rápidamente y como prueba de ello se cuenta con la aparición de la investigación *Fundamentals of Set Theory* (*Grundzüge der Mengenlehre*) en 1914, autoría de

[32] Véase (Larios, 2018).

[33] La traducción que aquí se hace de "tiling theorem" tiene que ver no solamente con la traducción de la palabra "tiling", sino también con el teorema mismo. La traducción de "tiling" es "embaldosado", que hace referencia al hecho de suelos que se encuentran revestidos mediante ladrillos, mientras que de "tilling theorem" se puede traducir como "teorema del mosaico", que hace alusión al mismo hecho antes descrito. Por otro lado, el teorema establece que si un cubo $n-dimensional$ es cubierto por las suficientes pequeñas piezas cerradas (en alusión a los conjuntos cerrados pequeños), existe entonces un sistema de $n+1$ dimensional sobre dicho cubo con una intersección no vacía y tal que todos los sistemas de $n+2$ piezas tienen intersección vacía; lo anterior es una clara referencia al proceso de embaldosar un suelo.

Hausdorff; como aspecto importante a resaltar, esta obra está dedicada a Cantor, lo que sabe a un poco de justicia después de lo mal que el genio ruso-alemán la pasó en vida (aunque en la eternidad le ha ido bastante bien, afortunadamente), honor a quien honor merece solían decir en los actos cívicos de mi colegio, hace ya muchos años de eso.



DEM SCHÖPFER DER MENGENLEHRE

HERRN GEORG CANTOR

IN DANKBARER VEREHRUNG

GEWIDMET

Fuente: (HAUSDORFF, 1914, pág. III).

A diferencia del trabajo de Brouwer, el de Hausdorff era en general comprensible para la comunidad matemática de la época y esto se explica por el hecho de que las demostraciones matemáticas planteadas por Brouwer empleaban conceptos nuevos (descubiertos por el mismo Brouwer) . A pesar de ello, Hausdorff estaba consciente de que las definiciones dadas por los titanes de la topología (entre los que claramente está incluido él), aunque cada vez más robustas matemáticamente, también cada vez eran más carentes de significado. Sobre ello diría Hausdorff, según lo reportado por (James, 1999, pág. 18), lo siguiente:

"***Nosotros no damos ninguna definición del concepto de curva; los conjuntos que ostentan este nombre por convención son de una naturaleza heterogénea tal que no pueden ser agrupados bajo ningún concepto de agrupamiento razonable.***"

Sin embargo, nótese que con la definición de Poincaré no ocurría el problema descrito por Hausdorff (independientemente no sea posible verificar si Hausdorff comprendió el significado filosófico de la definición de Poincaré -la definición matemática indudablemente la comprendió-). Por ello, es necesario decir algunas palabras adicionales sobre la definición de Poincaré; desde la perspectiva de Brouwer, la definición de Poincaré era insatisfactoria y la razón de ello era que su propia visión filosófica entraba en contradicción con los resultados matemáticos de Poincaré (ahí se encuentra el primer error, en no separar hasta cierto punto prudencial la Filosofía y las Matemáticas). La visión filosófica de Brouwer, esquematizada en (Rosental & Iudin, 1971, pág. 247), es una "Escuela filosófica idealista, surgida a principios del siglo XX en relación con la polémica en torno a los fundamentos teóricos de la matemática. Va unida a los nombres de Brouwer, Weyl, Heyting y otros. Según el intuicionismo, una parte concreta del pensamiento se basa en la *intuición*, entendida como facultad de diferenciar identificar con claridad los objetos del pensamiento. La intuición llena de contenido el juicio, le confiere sentido y también sirve como criterio de la verdad. La demostración matemática no convence por su rigor lógico, sino por la claridad intuitiva de cada una de sus eslabones. La confianza en la lógica aristotélica constituye una fuente de contradicciones (antinomias) no bien rebasamos los límites de los conjuntos finitos de los cuales dicha lógica ha sido abstraída. De ahí que, en última instancia, la intuición deba juzgar incluso acerca de si son aplicables o no las reglas lógicas. Sin embargo, el intuicionismo (a diferencia del *intuitivismo*) no contrapone la intuición a la lógica. Las concepciones filosóficas de la escuela intuicionista no eran científicas y no alcanzaron mucha difusión; más la crítica de principio que sus representantes hicieron de los conceptos de demostración y definición, desempeñaron un importante papel en la formación de la lógica y de la matemática constructivas." La definición filosófica que es posible extraer de la definición matemática dada por Poincaré es verdadera independientemente de la precisión de su definición matemática, que puede fallar intuitivamente para el caso descrito por Brouwer e incluso podría fallar para otros, pero de ahí la importancia de comprender que las matemáticas nos dan las definiciones, pero la filosofía los significados y que hasta cierto punto deben mantenerse separadas porque a pesar de su estrecha interrelación no son lo mismo (dada su propia naturaleza) y conviene no olvidarlo.

A causa de lo expuesto anteriormente, para Brouwer era una herida mortal a la definición matemática de Poincaré que esta no fuese intuitiva (que más que una matemática era una filosofía, entonces las métricas de evaluación no parecen ser las idóneas), puesto que como acertadamente afirmaba Brouwer, de acuerdo a la definición formal dada por Poincaré, un el cono doble era de dimensión unitaria puesto que este puede ser cortado en dos piezas removiendo un único punto, mientras que intuitivamente el cono es una figura matemática bidimensional y ahí precisamente quedan en evidencia las falencias filosóficas de Brouwer y precisamente con ello también las razones por las que a pesar de que su crítica al programa de Hilbert era válido, no pudo imponerse al matemático alemán durante la célebre controversia Brouwer-Hilbert (el evento que dio nacimiento definitivo a las diferentes escuelas de filosofía de las matemáticas y, con ello, dio luz a la metamatemática), como lo señalaron anteriormente Rosental y Iudin; sin embargo, como desprende de lo planteado por (James, 1999, pág. 17), al fundar el intuicionismo Brouwer también se convirtió en el primer matemático en fundamentar sus demostraciones con base en el concepto temprano de *espacio abstracto* (un espacio cuyos elementos no son puntos geométricos -ejemplo característico de esto son los espacios de funciones estudiados en análisis funcional-) desarrollado por Maurice Fréchet (1878-1973) (los cuales también estaban fundamentados en conceptos de topología combinatoria) combinado con una definición de un concepto fundamental en la filosofía de las matemáticas (haciendo gala de su pasión fundacional), del concepto de *continuo*. En el esquema de Brouwer, el concepto de continuo era un prerrequisito innegociable para definir el concepto de dimensión [lo cual, para agrado de Brouwer, resulta intuitivo (y también lógico, puesto difícilmente se puede discutir que la continuidad o no-continuidad de la estructura misma de la realidad es una característica más esencial de ella que el concepto de dimensión -aunque no por ello este no es esencial también-)].

Sin embargo, a pesar de los dos aciertos filosóficos anteriormente descritos, al combinarse estos con su convicción filosófica (que en la opinión del autor de esta investigación es epistemológicamente válida) en una búsqueda por restringir la aplicabilidad de las propiedades para conjuntos finitos o infinitos numerables en conjuntos de cardinalidad transfinita (con una cantidad de elementos infinita no-numerable, *i.e.*, que no es posible establecer entre ella y los números naturales una correspondencia biyectiva), el resultado concreto (a nivel de demostraciones) de las características filosóficas de Brouwer descritas anteriormente fue que sus demostraciones eran basadas en las propiedades internas de los conjuntos bajo consideración y no sobre su estado en espacios matemáticos más grandes, lo que a pesar de las bondades antes descritas también genera el efecto filosóficamente negativo de que, al restringir la generalidad con la que se puede hablar de conjuntos, el sistema teórico de las matemáticas se desliga involuntariamente en alguna medida de la noción que el contexto (presente y pasado) es fundamental para el análisis de todo fenómeno de la realidad.

En epílogo de esta sección es pertinente preguntarse entonces qué es la Topología y qué es la Topología Algebraica, incluso es válido también preguntarse qué debe entenderse en su sentido filosófico por invariancia topológica.

Como se expuesto anteriormente, la topología nace en potencia en la mente de Leibniz, quien fue el primero en imaginar una geometría en la cual la posición, en lugar de la magnitud, fuera el factor de mayor importancia (recuérdese que en 1676 Leibniz empleó el término “geometría situs” o “geometría de la posición”).

Generalizando las ideas retomadas en el párrafo anterior, según la (Real Academia Española, 2021), por el origen etimológico de la palabra, la Topología puede definirse como la ciencia del lugar (del gr. τόπος tópos 'lugar' y -logía), mientras que por su significado matemático más simple como la rama de las matemáticas que trata especialmente de la continuidad y de otros conceptos más generales originados de ella, como las propiedades de las figuras con independencia de su tamaño o forma.

Lo anterior se puede generalizar y concretizar más, sin embargo, para ello es necesario definir sintéticamente las nociones geométricas de “retorcer”, “estirar”, “deformar” y “desgarrar/pegar”, para lo cual es necesario a su vez comprender el concepto de *transformación*, el cual no es más que el objeto matemático usualmente conocido bajo el nombre de *función*, como se verifica en (Weisstein E. , Transformation, 2021). Ejemplos de transformaciones son caracterizados en la figura presentada a continuación.

Transformation	Characterization
dilation	center of dilation, scale decrease factor
expansion	center of expansion, scale increase factor
reflection	mirror line or plane
rotation	center of rotation, rotation angle
shear	invariant line and shear factor
stretch (1-way)	invariant line and scale factor
stretch (2-way)	invariant lines and scale factors
translation	displacement vector

Fuente: (Weisstein E. , Transformation, 2021).

La noción de torcer un objeto geométrico matemáticamente se define como el radio al cual una cinta gira alrededor de su eje, como se verifica en (Weisstein E. , Twist, 2021). La noción de estirar un objeto geométrico se define matemáticamente como una transformación caracterizada por una línea invariante y un factor de escala (en caso de estiramiento unidireccional) o dos líneas invariantes y dos factores de escala (en caso de estiramiento bidireccional), como se verifica en (Weisstein E. , Stretch, 2021). La noción de deformar un objeto geométrico se define matemáticamente como el estudio de las condiciones infinitesimales (resultantes de aplicar el enfoque del cálculo diferencial para resolver problemas de optimización con restricciones) asociadas con la variación de una solución P de un problema a soluciones diferentes $P_{\mathcal{E}}$, en donde $\mathcal{E}$ es algún número infinitesimalmente pequeño o un vector de cantidades infinitesimalmente pequeñas, como se verifica en (Wikipedia, 2020). A continuación, se presentan ejemplos gráficos de estas transformaciones que mantienen inalteradas las propiedades topológicas de un objeto geométrico.

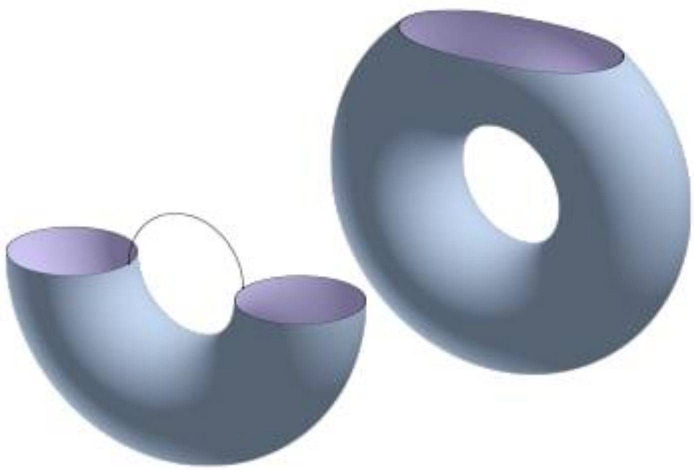
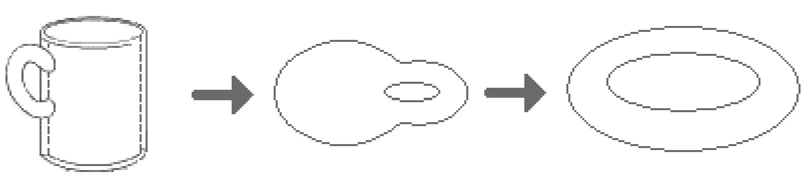


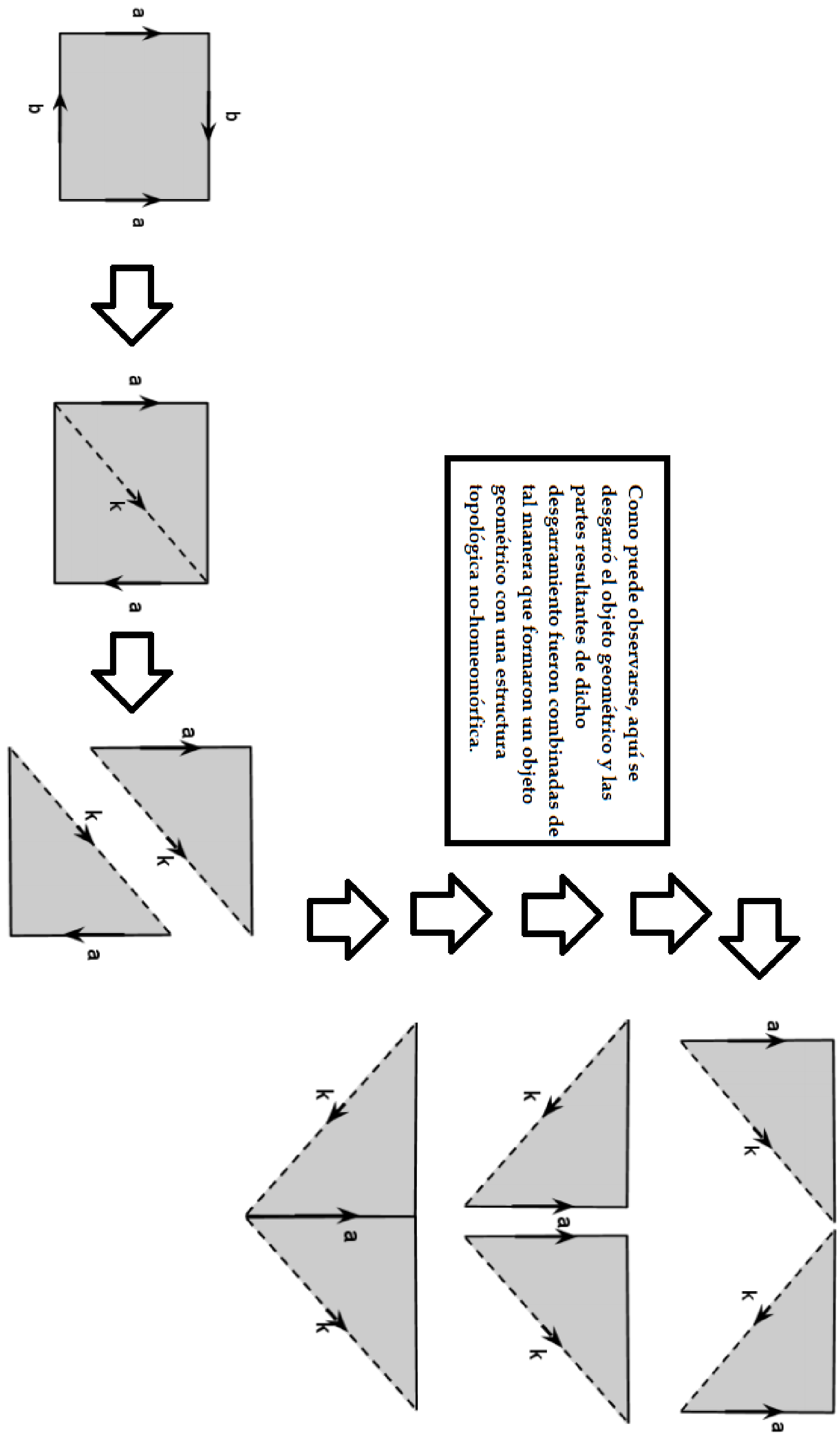
Fig. 16: Here you see how cylinder curves and slowly become Torus.

Fuente: (Rousan, 2019, pág. 5).

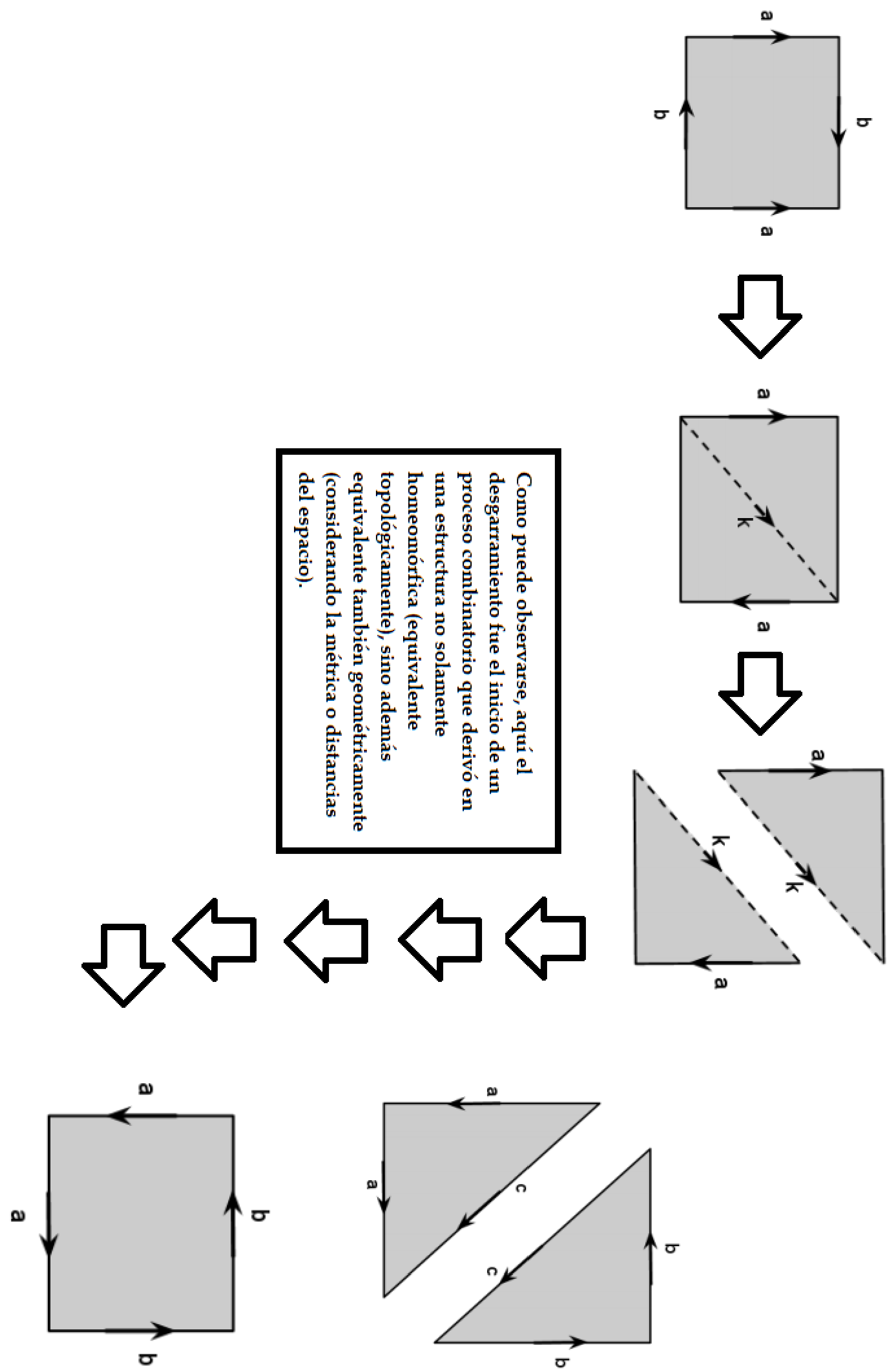


Fuente: (Wikipedia, 2020).

Finalmente, tanto la noción de desgarrar (cortar) como la noción unir (pegar) un objeto geométrico, están ligadas indisolublemente, puesto que matemáticamente sus definiciones están íntimamente vinculadas. Así, por desgarrar y unir un objeto geométrico debe entenderse lo mismo que se entiende en las primeras etapas de la infancia, cuando se aprende a cortar y a pegar figuras geométricas. ¿Cuál es entonces para el(la) matemático(a) la herramienta equivalente a la tijera del niño(a)?, cualquier función que altere las propiedades topológicas del objeto geométrico, *i.e.*, las propiedades que permiten que la estructura bajo la cual se conectan los puntos (la estructura bajo la cual se determina la localización de los puntos conectados de tal o cual manera -la estructura matemática interna del espacio en cuestión, que se asume aquí como un espacio conexo o conectado-) sea de una determinada manera y no de otra manera no-equivalente (*i.e.*, no-homeomórfica).



Fuente: Elaboración propia, con base en (Berkeley Math Circle, 2018, págs. 7-8).



Fuente: Elaboración propia, con base en (Berkeley Math Circle, 2018, págs. 7-8).

Así, están establecidas las condiciones para que la generalización antes mencionada sea posible. (Weisstein E. , Topology, 2021) señala que "La topología es el estudio matemático de las propiedades que se conservan mediante deformaciones, torsiones y estiramientos de objetos. Sin embargo, no se permite rasgar. Un círculo es topológicamente equivalente a una elipse (en la que se puede deformar mediante el estiramiento) y una esfera es equivalente a un elipsoide. De manera similar, el conjunto de todas las posiciones posibles de la manecilla de la hora de un reloj es topológicamente equivalente a un círculo (es decir, una curva cerrada unidimensional sin intersecciones que se pueda incrustar en un espacio bidimensional), el conjunto de todas las posiciones posibles de las manecillas de las horas y los minutos tomadas juntas es topológicamente equivalente a la superficie de un toro (es decir, una superficie bidimensional que se puede incrustar en un espacio tridimensional), y el conjunto de todas las posiciones posibles de las manecillas de las horas, los minutos y los segundos tomadas juntas son topológicamente equivalentes a un objeto tridimensional."

¿Es posible generalizar lo suficiente la definición anterior como para concebir una definición filosófica de Topología? La respuesta es afirmativa, sin embargo, para ello es necesario introducir la definición matemática formal de espacio topológico, la cual se volverá a estudiar en la siguiente subsección.

Según (Kelley, 1962, pág. 50), una topología es una familia $\mathcal{J}$ de conjuntos que satisface las dos siguientes condiciones: 1) la intersección de dos miembros cualesquiera de $\mathcal{J}$ es un miembro de $\mathcal{J}$, y la unión de los miembros de cualquier subfamilia de $\mathcal{J}$ es miembro de $\mathcal{J}$. El conjunto $X = \bigcup\{U : U \in \mathcal{J}\}$ es necesariamente miembro de $\mathcal{J}$, porque $\mathcal{J}$ es subfamilia de sí misma; todo miembro de $\mathcal{J}$ es parte de X. El conjunto X es el espacio de la topología de $\mathcal{J}$ (*i.e.*, el espacio o estructura matemática interna del objeto geométrico X, el cual está regido por la topología de $\mathcal{J}$ -puesto que para satisfacer las dos condiciones antes mencionadas existen diferentes topologías -que expresa matemáticamente la localización de dichos elementos-), mientras que $\mathcal{J}$ es una topología de X. El par $(X, \mathcal{J})$ es un espacio topológico. Antes de continuar con la exposición de Kelly es necesario hacer algunas aclaraciones adicionales. ¿Cómo es posible que la distancia entre puntos cambie sin cambiar la localización de los objetos?, pues la respuesta a la pregunta anterior tiene dos componentes. El primero es que, en el proceso de abstracción de las ciencias, las Matemáticas estudian por separado la localización y la distancia de los objetos, pero ¿esto quiere decir que su separación es algo real (entendido esto como la esencia de la realidad -el todo-)? En lo absoluto, lo real es que están indisolublemente unidos (puesto que lo están esencia, contenido y forma), sin embargo, con el fin de profundizar en el conocimiento de las propiedades de los objetos geométricos, estas se estudian haciendo abstracción de las distancias existentes entre sus elementos integrantes, por lo que en muchos espacios topológicos al cambiar la localización de dos elementos ni siquiera tiene sentido matemático hablar de distancias, puesto que no existe métrica o, en otras palabras, no existe una medida aceptable (*i.e.*, con un mínimo de precisión requerido -de ahí la importancia de las demostraciones matemáticas en este sentido-) de la distancia que separa la localización de dos elementos dentro del espacio (que puede concebirse como una medida aceptable del estado -caracterización completa, esencial y no-esencial- de una variable o conjunto de variables dentro de un sistema). Lo anterior con base en lo expuesto anteriormente, mientras que el segundo componente de la respuesta tiene que ver con que, tal y como se señala en (Rousan, 2019, pág. 1), la posición es una *posición relativa*, ¿y relativa a qué?, a la estructura que contiene los elementos en cuestión (que no es la apariencia del objeto geométrico, sino más que eso -y ya se explicará en breve-). ¿Qué debe entenderse entonces, a nivel epistemológico general (a nivel de lo real, lo cual evidentemente va mucho más allá de las Matemáticas) por la estructura interna o topología de un objeto (matemático o, llegado aquí, cualquier otra cosa que exista)? Pues lo mismo que debe entenderse por la estructura interna de un sistema. Entonces, pues, ¿qué es un sistema? Se define un sistema como aquel:

"Conjunto de elementos, relacionados entre sí, que constituyen una determinada formación íntegra. El análisis de un sistema (de los objetos de un sistema) forma una de las particularidades características de las disciplinas científicas modernas. El objeto de un sistema no puede descomponerse en elementos diversos ni en relaciones entre ellos; no es posible entrar en conocimiento de él si sólo se delimita una determinada conexión a las que en él se dan: lo específico de tal objeto estriba en la presencia de una interdependencia de conexiones; la investigación de esta interdependencia constituye un importante objeto tanto del análisis científico especial como del análisis teórico-cognoscitivo (lógico y metodológico)."
(Rosental & Iudin, 1971, pág. 426).

Ahora bien, ¿qué es entonces la estructura de un sistema?

"Conexión y relación recíproca, estables, sujetas a ley, entre las partes y los elementos de un todo, de un sistema. En matemática y en lógica matemática, la definición exacta de estructura se formula recurriendo al concepto de isomorfismo. La categoría de estructura se halla estrechamente vinculada a las categorías -que le son afines- de ley, forma, necesidad, etc. Permanece invariable a pesar del cambio constante de las partes y del todo mismo, sólo se transforma cuando en el todo se produce un salto cualitativo. Por otra parte, los elementos del todo sin excepción, dependen de manera esencial de su estructura, desempeñan un papel cualitativamente distinto en dependencia del modo y del sistema de sus nexos y de su organización." (Rosental & Iudin, 1971, pág. 158). Recordando al lector que un isomorfismo es equivalente en Topología a un homeomorfismo (estudiados en esta investigación), que por *ley* debe entenderse algún miembro de la colección de familias de leyes científicas que rigen la esencia de la realidad (lo real) y por *modo* debe entenderse un equivalente a la *forma aristotélica* (que es precisamente el objeto de estudio de la lógica formal y de las Matemáticas en general), opuesto a la *esencia* (en su sentido filosófico y definida en la sección IX) y en unidad con ella, mientras que por *sistema* debe entenderse lo anteriormente expuesto al respecto.

¿Cómo se conecta entonces la definición marxista de sistema con la definición de “la topología que rige una determinada estructura” (que en su sentido filosófico puede ser de un objeto matemático o de otro objeto)? Aquí las claves son las palabras “combinación” e “isomorfismo” (u homeomorfismo, dado que en el contexto puramente de la Topología son lo mismo -de hecho, los homeomorfismos son conocidos también como isomorfismos topológicos-), así como una breve síntesis del análisis histórico previamente realizado sobre esta rama de las Matemáticas. Como el concepto de homeomorfismo se estudia en esta investigación [sintética e intuitivamente, un homeomorfismo es una función (una relación entre dos cosas) continua (que evoca el concepto de “sin hoyos”, de “una sola pieza”) y biyectiva (que pone en relación uno-a-uno los elementos de dos conjuntos, variables o espacios) entre las estructuras internas (que matemáticamente es la posición relativa de los elementos dentro del conjunto o espacio) de dos sistemas estudiados, que son una el inverso de la otra (como señala (Wikipedia, 2021), la intuición de “elemento inverso” es la de un elemento que puede “deshacer” el efecto de combinación con otro elemento dado, aunque si bien la definición precisa de “elemento inverso” varía según la estructura algebraica sobre la que se estudie un par de elementos determinado, estas definiciones coinciden en el contexto de los grupos algebraicos (definidos en la sección pertinente a álgebra abstracta); desde la teoría marxista, el inverso es la negación de la afirmación, *i.e.*, los inversos son los pares dialécticos contrarios entre sí -cuyas contradicciones pueden ser antagónicas o ser no-antagónicas, incluso una combinación de ambas en que una relación no-antagónica devenga en antagónica o viceversa, aunque esto último no parecería ser posible sin el influjo significativo de una fuerza externa al sistema de estudio-)], se procederá a explicar el concepto de “combinación”, en conjunto con la breve síntesis de la génesis histórica de la topología.

La palabra “combinar”, según (Real Academia Española, 2021), proveniente del latín tardío *combināre*, significa “Unir cosas diversas, de manera que formen un compuesto o agregado", en donde según la (Real Academia Española, 2021) debe entenderse por "compuesto" aquel agregado [definido a su vez por la (Real Academia Española, 2021), como "Conjunto de cosas homogéneas que se consideran formando un cuerpo", donde lo de homogéneo es relativo (por lo que pueden también ser cosas heterogéneas) y por cuerpo debe entenderse el "Conjunto de los sistemas orgánicos que constituyen un ser vivo" (Real Academia Española, 2021), es decir, un sistema de sistemas (que no es otra cosa que un sistema que sirve para expresar fenómenos de la realidad que son particularmente difíciles de analizar por la multiplicidad de variables involucradas y la complejidad de las interrelaciones entre tales variables)] de varias cosas que conforman un todo [definido "un todo" a su vez como la totalidad de los miembros de un conjunto al que se hace referencia].

Como se puede verificar en el estudio histórico anteriormente realizado en esta subsección, existen tres aspectos históricos-teóricos ya señalados que en este momento es de interés recordar:

1. Como se verifica de lo expuesto por (James, 1999, pág. 17), al fundar el intuicionismo Brouwer también se convirtió en el primer matemático en fundamentar sus demostraciones con base en el concepto temprano de *espacio abstracto* (un espacio cuyos elementos no son puntos geométricos - ejemplo característico de esto son los espacios de funciones estudiados en análisis funcional-) desarrollado por Maurice Fréchet (1878-1973) (***los cuales también estaban fundamentados en conceptos de topología combinatoria***) combinado con una definición de un concepto fundamental en la filosofía de las matemáticas (haciendo gala de su pasión fundacional), del concepto de *continuo*.
2. "La disciplina de la topología algebraica se conoce popularmente como "geometría de láminas de goma" y también puede verse como el estudio de las desconexiones (…) ***La topología algebraica se originó con la topología combinatoria***, pero fue más allá probablemente por primera vez en la

década de 1930 cuando se desarrolló la cohomología Čech.” (Weisstein E. , Algebraic Topology, 2021).

3. Así, continuó la evolución de la Topología General hasta la primera década del siglo XX, cuando algunos prominentes matemáticos concibieron una variedad de ideas nuevas sobre el concepto de dimensión, especialmente Henri Poincaré (1854-1912), René Baire (1874-1932), Maurice Fréchet (1878-1973) y Frigyes Riesz (1880-1956). Era natural que Poincaré, cuyas ideas contribuyeron significativamente a dar a luz a la Topología Algebraica moderna (de hecho, es considerado, como puede verificarse en (Lambrechts, 2009, pág. 2), el padre de la topología algebraica[34]) se interesara por estudiar el problema de la dimensión topológica. El interés de Poincaré nacía no de sus investigaciones matemáticas sino de sus investigaciones filosóficas sobre los orígenes y la naturaleza del conocimiento geométrico, así como también de la relación existente a nivel filosófico entre la geometría y el espacio observable en la realidad. Como señala (James, 1999, pág. 12), él propuso una definición de dimensión topológica porque estaba tratando con preguntas cosmológicas o, como señala el autor, sería más preciso decir que trataba con cuestiones epistemológicas (en el sentido ya definido en esta investigación), no por cuestiones matemáticas.
4. “Los problemas que plantea la fundamentación de la matemática hacen que paralelamente a los trabajos que se llevan a cabo en la esfera de la lógica clásica se elabore la *lógica constructiva*. ***Al análisis de los fundamentos de la lógica están unidas las investigaciones concernientes a la lógica combinatoria***. Se crea la teoría de la *lógica polivalente*. Los intentos de resolver el problema de cómo formalizar las investigaciones lógicas elevan a la creación de cálculos de una *implicación* rigurosa y fuerte. Se están sentado

[34] Como se verifica en (Lambrechts, 2009, pág. 2), la topología algebraica es la teoría matemática que versa sobre la distinción de las formas de los objetos geométricos mediante cómputos algebraicos (*i.e.*, cálculos de carácter algebraico).

> las bases de la *lógica modal*. Por otra parte, la lógica matemática ejerce una gran influencia sobre la propia matemática moderna, algunos de cuyos aspectos esenciales han surgido de ella; así ha ocurrido, por ejemplo, con las teorías de los algoritmos y de las funciones recursivas." (Rosental & Iudin, 1971, págs. 280-281).

Por consiguiente, la topología tiene que ver entonces, desde el punto de vista del hecho de que en su génesis histórica la topología moderna echó mano de las ideas del análisis combinatorio (por los elementos algebraicos contenidos en su "código genético", en su origen fundacional) y de la teoría de grupos, no con la métrica de un sistema sino con la estructura interna bajo la cual se agrupan y combinan los elementos de un sistema con base en su localización (posición) dentro de dicho sistema (evidentemente, a nivel estrictamente matemático en cualquier espacio métrico el agrupamiento y combinación es prerrequisito indispensable para hablar de métrica puesto que un espacio antes de ser métrico es inexorablemente topológico -viceversa no es necesariamente cierto-; desde el punto de vista no matemático, el hecho de que un espacio antes de ser métrico sea topológico está fundamentado en la noción intuitiva de que para hablar de distancias entre elementos primero esos elementos deben poder ser localizados en algún lugar dentro del espacio de estudio).

Así, la estructura interna es, conectando la definición marxista con la matemática, el proceso esencial (*i.e.*, fundamental, determinante, más importante) mediante el cual se combinan los elementos de un sistema, en donde tal proceso, característico a cada sistema estudiado (aunque no necesariamente único a ese sistema -*i.e.*, una estructura interna puede caracterizar más de un sistema-), determina en general la dinámica de dicho sistema.

Ahora sí es posible desarrollar una definición marxista de topología. La *Topología* es la rama de las matemáticas que se encarga del estudio de aquellas *propiedades* de los objetos matemáticos (o de los sistemas abstractos[35] inclusive) *que no cambian* incluso después de aplicar deformaciones que afecten las distancias entre sus elementos [esto ocurre debido a que las deformaciones (por deformaciones se entienden flexionar, estirar o aplicar torsión sobre el objeto matemático -o sistema- de estudio) realizadas sobre la localización de los elementos dentro del objeto matemático (o sistema, o fenómeno natural o social) afecta las distancias existentes entre ellos, no su localización[36]], bajo la condición de que tales deformaciones no alteren la localización (definida por un $\mathcal{J} - entorno$) de los $n - ésimos$ elementos que caracterizan la estructura interna del objeto matemático (o del sistema, o del fenómeno natural o social de estudio), lo que implica que tales deformaciones no deben ser radicales, en el sentido etimológico de la palabra, *i.e.*, "Perteneciente o relativo a la raíz", "Fundamental o esencial" (Real Academia Española, 2021).

¿Qué es entonces una *propiedad topológica* o *invariante topológico*? Para definir esto debe definirse primero el concepto de invariancia. Según (Rosental & Iudin, 1971, págs. 247-248), la invariancia es la "***Propiedad que poseen las magnitudes, ecuaciones y leyes, de permanecer invariables, de conservarse cuando se producen determinadas transformaciones de coordenadas y de tiempo***. Por ejemplo, las leyes del movimiento en la mecánica clásica son invariantes respecto a las transformaciones espacio-temporales de Galileo; las leyes del movimiento en la teoría de la relatividad son invariantes respecto a las transformaciones de Lorentz (…) ***Al pasar de una vieja teoría a otra nueva, la anterior propiedad de invariancia se mantiene o se generaliza, pero no se desecha. La propiedad de invariancia se desprende de la unidad material del mundo, de la homogeneidad de principio que poseen los objetos físicos y sus propiedades***."[37] Así, una familia de propiedades

---

[35] El mismo concepto de Maurice Fréchet retomado por L.E.J. Brouwer, simplemente expresado, no solo en la jerga de los sistemas, sino también desde la lógica de los sistemas, que es lo más importante.
[36] A tal propiedad se le conoce como *propiedad topológica* o *invariante topológico*, las cuales serán definidas en breve.
[37] En esto no sólo están de acuerdo los maestros filósofos soviéticos, sino también el físico teórico Niels Bohr, quien acuñó el concepto filosófico conocido *principio de complementariedad*, el cual es un

topológicas (o familia de invariantes topológicos) puede entenderse como aquellas características esenciales de un fenómeno natural o social que no cambian ante transformaciones realizadas sobre su forma y/contenido (en el sentido filosófico definido en la sección VIII.II), las cuales pueden ser denominadas también como transformaciones no esenciales, puesto que no tienen que ver con la estructura más íntima, *i.e.*, interna, esencial, del fenómeno natural o social estudiado. Matemáticamente, esto puede expresarse, como ya señalaron los filósofos soviéticos, como la propiedad de un espacio topológico que es invariante bajo un homeomorfismo[38]. Lo anteriormente expuesto implica tres cuestiones teóricas importantes: 1. El desgarramiento-ligamento topológico implica, dado lo planteado por Rosental y Iudin en diferentes lugares de la obra citada (y ya expuesto), un cambio esencial del fenómeno natural o social, es decir, un salto cualitativo del fenómeno de estudio, 2. Las transformaciones métricas antes mencionadas -retorcer, estirar y deformar- son en su forma más general "determinadas transformaciones de coordenadas y de tiempo" (Rosental & Iudin, 1971, págs. 247-248), 3. Al ser la topología entonces el estudio de la estructura interna de los sistemas sin realizar desconexiones (*i.e.*, sin romper lo unido ni pegar lo desunido), los estudios topológicos de un fenómeno natural o social implican en la generalidad de casos un estudio de su comportamiento promedio de largo plazo.

Sobre los tres puntos anteriores cabe aclarar dos cuestiones. La primera es sobre la cuestión 2, específicamente expresar que su interpretación filosófica minuciosa es posible, sin embargo, implicaría por sí misma una sección extensa de esta

---

"Principio metodológico expuesto por Bohr al tratar de la interpretación de la Mecánica Cuántica. Puede formularse como sigue: para la reproducción de la integridad de un fenómeno es necesario aplicar en el conocimiento clases de conocimientos "complementarias" y que se excluyan recíprocamente." (Rosental & Iudin, 1971, pág. 374).

[38] Consúltese la siguiente sección para estudiar con relativa profundidad el concepto que, en la humilde opinión del autor de esta investigación, es el más importante en la historia de la Filosofía de las Ciencias y, sin mucho temor a equivocación, de la Filosofía en general. Sintéticamente, sin embargo, un homeomorfismo puede definirse como una función continua biyectiva f entre dos objetos matemáticos con las mismas propiedades topológicas (o de un objeto matemático a sí, *i.e.*, entre dos objetos matemáticos iguales), las cuales la función no altera.

investigación, la cual de momento no ha resultado ser necesaria y no parece ser que lo vaya a parecer. La segunda es sobre la cuestión 3, específicamente que aquí no debe entenderse por "comportamiento promedio de largo plazo" como comportamiento ergódico en el sentido matemático, puesto que los promedios que en la teoría ergódica se estudian son promedios simples (la media aritmética o primer momento -alrededor de cero- de una distribución de probabilidad), mientras que en la opinión del autor de esta investigación, los promedios bajo los cuales funciona la realidad esencial (lo real) son promedios ponderados (en donde el criterio de ponderación varía en función de cada conjunto de casos -en donde se admiten un conjunto de solo un caso, por supuesto-). Esta lógica es tomada fundamentalmente del tratamiento que Marx realiza de la transformación de los valores en precios de producción (en donde la tasa media de ganancia es un promedio ponderado por el peso de cada capital individual en el capital social global), del hecho de que un promedio simple puede plantearse como un promedio ponderado en que todos los factores de ponderación son iguales, del hecho que existen múltiples esfuerzos para generalizar tanto el teorema central del límite como la ley de los grandes números para escenarios de dependencia entre las variables estudiadas (entre tales esfuerzos figuran generalizaciones de estas leyes de la estadística clásica a través de promedios ponderados) y del hecho mismo de la importancia de la teoría ergódica en el estudio matemático actual de los sistemas dinámicos no-caóticos.

Como prueba de la validez epistemológica del planteamiento filosófico anterior véase el caso de la biología molecular. Como se señala en (Murasugi, 1996, págs. 267-268), "F.H.C. Crick & J.D. Watson, en uno de los descubrimientos más grandes del siglo XX, desenmarañaron la estructura básica del ADN. Por esta profundidad en la sustancia de la materia viva, fueron premiados juntos con el Premio Nobel de Medicina en 1962. Esencialmente, se puede pensar en una molécula de ADN como dos hebras lineales entrelazadas en forma de una doble hélice con un eje lineal. Una molécula de ADN también puede tomar la forma de un anillo y, por lo tanto, puede enredarse o anudarse. Además, un fragmento de ADN puede romperse temporalmente. Mientras esté en este estado roto, la estructura del ADN puede sufrir un cambio físico y finalmente el ADN se recombinará. De hecho, a principios de la década de 1970 se descubrió que una sola enzima llamada topoisomerasa (ADN) puede facilitar este proceso completo, desde la ruptura inicial hasta la recombinación. El lector que haya tomado este libro, haya mirado el título y luego haya abierto al azar el libro en esta página puede pensar que el editor ha insertado de alguna manera algunas páginas de un libro de texto elemental sobre biología aquí por error. Pero, reconsideremos lo anterior: la estructura de doble hélice del ADN -en algunas ocasiones el ADN puede tener incluso una sola hebra- es una entidad geométrica, o más precisamente, una configuración topológica. Esta configuración topológica es en sí misma una manifestación de unir o anudar. Además, se ha demostrado que cuando una topoisomerasa hace que el ADN cambie de forma, el proceso es muy similar a lo que ocurre localmente en los diagramas de madejas. Por lo tanto, para la entidad geométrica, anudada o ligada, el número de vínculo es un concepto importante, mientras que la acción de la topoisomerasa está relacionada con las nuevas invariantes de madeja. al intentar comprender los cambios que sufre el ADN; esto a veces se denomina *enfoque topológico de la enzimología*." Como puede observarse, las reflexiones planteadas anteriormente guardan correspondencia con la realidad objetiva a nivel general, más allá del nivel estrictamente matemático, a tal punto que "Una molécula de ADN también puede tomar la forma de un anillo y, por lo tanto, puede enredarse o anudarse. Además, un fragmento de ADN puede romperse temporalmente. ***Mientras esté en este estado roto, la estructura del ADN puede sufrir un cambio físico y finalmente el ADN se recombinará***" es justamente lo planteado en referencia al salto cualitativo existente al realizar transformaciones radicales sobre el conjunto de propiedades topológicas, puesto que de hecho, las topoisomerasas son enzimas que se definen en biología molecular como aquellas capaces de actuar sobre la topología del ADN, ya sea enredándolo para permitir que se almacene de manera más compacta o desenredándolo para que controle la síntesis de proteínas y para facilitar la replicación del mismo, según se señala en (Wikipedia, 2021).

De manera sumaria respecto de lo anterior debe comenzarse por señalar que lo que implican los estudios topológicos de un fenómeno natural o social no equivale a lo que son. Tales estudios son aquellos que abordan el conjunto de propiedades esenciales de los fenómenos naturales y sociales, lo cual implica usualmente (al desear conocer la esencia de los fenómenos de índole natural o social) estudiar su comportamiento medio de largo plazo (por ejemplo, en Economía Política con lo de la tasa media de ganancia y los precios de producción -la tasa media de ganancia es un promedio ponderado de largo plazo y los precios de producción son la variable plusvalía transformada por tal precio promedio, por lo que de alguna forma todos reflejan las condiciones medias de la economía, medias ponderadas-, lo mismo ocurre con en la Biología Evolutiva con la selección natural -que actúa a largo plazo, aunque a veces pueda actuar a corto plazo, como descubrió el célebre biólogo evolutivo marxista Stephen Jay Gould-), pero no por ello deben entenderse como equivalentes su ser y su finalidad, aunque evidentemente exista una relación no trivial entre tales aspectos de los fenómenos naturales y sociales.

Así, como la topología es el conjunto de propiedades esenciales (lo que tiene su equivalencia en el Marxismo con las tres leyes fundamentales de la dialéctica -el conjunto de estas leyes variará según el fenómeno de estudio, de ahí la existencia de diversas ciencias-), cuando se desgarra la topología de un fenómeno se está desgarrando (cambiando) la esencia del mismo (lo que en Física se denominaría como transición de fase o cambio de estado del fenómeno -en este caso, de un fenómeno de naturaleza física-), por lo que lo que se describió ocurría al cortar una de las dos hélices de la molécula de ADN representa la verificación epistemológica de la capacidad explicativa universal de la lógica marxista, puesto que al desgarrar una molécula de ADN cambia la esencia de la molécula (es decir, es otra molécula) y además estas nuevas moléculas (generadas por el desgarramiento molecular) pueden combinarse entre sí para formar nuevas moléculas que es precisamente el concepto de "desgarrar/unir" en Topología General, lo que es evidentemente una manifestación biológica-molecular de la ley de la dialéctica conocida como *salto de lo cuantitativo a lo cualitativo* (como cuando en el caso del agua porque hubo una variación cuantitativa lo suficientemente grande para generar una variación cualitativa y hacerla transitar al estado gaseoso o al estado sólido), que, aunque también al cambiar la cualidad puede variar la cantidad, se plantea en ese sentido (que la variación en la cantidad cambia la cualidad) porque todo sistema parte de un estado inicial o de lo que computacionalmente se conoce como *valores semilla*. Es necesario aclarar que desgarrar y unir moléculas efectivamente no es ya un estudio estrictamente topológico de la molécula (por la misma definición de topología) sino un estudio de topología algebraica, pero el hecho descrito sí es una verificación de la nítida congruencia existente entre el concepto filosófico dado de topología y el comportamiento real de un fenómeno natural verificado científicamente. Las Matemáticas son el estudio de las formas, pero dentro de esas formas, la topología es la parte esencial de ese estudio, lo cual tiene importantes implicaciones epistemológicas. Recuérdese que, en el universo de cada ciencia, los objetos existen legítimamente como reales. ¿Qué es un número?, no existe demostración matemática de la existencia de los números, aunque a pesar de ello en el universo, por ejemplo, de la Teoría Estadística y de las Probabilidades son entidades reales, porque guarda una correspondencia suficiente con la realidad (en donde lo "suficiente" está determinado por la cantidad y calidad de información disponible, los requerimientos especiales de la investigación y, en última instancia, por el nivel tecnológico de cada época). Así, las Matemáticas son lógica formal aplicada (*i.e.*, filosofía aristotélica aplicada -lógica formal- que a su vez es aplicada, dando a luz a las matemáticas). Por lo anterior, todo lo que las matemáticas estudien sólo es "el cascarón" de un fenómeno de la realidad, puesto que es la aplicación de la lógica aristotélica de las formas. Sin embargo, dentro del universo de las Matemáticas, ocurre con tales "cascarones" que "cobran vida", es decir, existen legítimamente como fenómenos reales. ¿A qué se debe esto?, a que así funcionan todas las ciencias, específicamente todas las ciencias usan la abstracción para simplificar sus análisis; por ejemplo, la Química hace abstracción relativa (hasta donde le es posible y conveniente técnicamente) de la Física, de la Geología, de la Biología y de las demás ciencias, al igual que el resto de ciencias respecto a las demás, lo que entonces implica que, salvo las ciencias multidisciplinarias, cada ciencia hace abstracción relativa de las $n-1$ ciencias restantes. En este sentido, las ciencias multidisciplinarias de $n-k$ ciencias, pero siempre existe y existirá abstracción relativa (porque hay diferencias cualitativas entre los fenómenos que marcan líneas que en determinado nivel de profundización analítica son y deben ser inalienables al estudio). Las matemáticas no son la excepción y tienen además la particularidad que, por su misma finalidad instrumental (*i.e.*, de proveer de instrumentos de medición a las demás ciencias) realiza el mayor grado de abstracción entre todas las ciencias, al punto de estudiar a los fenómenos naturales o sociales como objetos casi completamente desprovistos de esencia (si fuese de forma completa, no sería posible analizarlos de la forma en que se han analizado aquí las Matemáticas), es decir, estudia en general únicamente sus "cascarones", pero dentro del universo matemático tales "cascarones" son fenómenos reales que existen legítimamente, por lo que en tal sentido la topología es el estudio de la esencia de los objetos matemáticos, mientras que la geometría (que implica métrica) lo es de las formas de tales objetos. Esto último se verifica en aquella célebre frase de Henri Poincaré: ¿Es el análisis matemático… tan sólo un vano juego de la mente? Le da al físico únicamente un lenguaje conveniente; 'no es éste un servicio mediocre del cual, estrictamente hablando, se podría prescindir?; y más aún, ¿no es de temerse que este lenguaje artificial pueda ser un velo interpuesto entre la realidad y el ojo del físico? Lejos de ello; sin este lenguaje, la mayor parte de las analogías íntimas entre las cosas nos seguirían siendo desconocidas; y, para siempre, habríamos permanecido ignorantes de la armonía interna del mundo, la cual es… la única realidad verdaderamente objetiva.", como cita (KAPLAN, 1985, pág. 5).

Para no dejar sombras alrededor de las diferencias entre la topología y la geometría, se señala en la Enciclopedia Británica que "La topología, aunque similar a la geometría, difiere de la geometría en que los objetos geométricamente equivalentes a menudo comparten cantidades medidas numéricamente, como longitudes o ángulos, mientras que los objetos topológicamente equivalentes se parecen entre sí en un sentido más cualitativo." (Carlson, 2021).

Finalmente, ¿qué es entonces la topología algebraica?, la diferencia con la topología es sutil, pero clara. Como señala (Weisstein E. , Algebraic Topology, 2021), "La topología algebraica es el estudio de los aspectos cualitativos intrínsecos de los objetos espaciales (por ejemplo, superficies, esferas, toros, círculos, nudos, enlaces, espacios de configuración, etc.) que permanecen invariables bajo transformaciones continuas uno-a-uno (homeomórficas) en ambas direcciones. La disciplina de la topología algebraica se conoce popularmente como "geometría de láminas de goma" y también puede verse como el estudio de las desconexiones. La topología algebraica tiene una gran cantidad de maquinaria matemática para estudiar diferentes tipos de estructuras de huecos, y recibe el prefijo "algebraico" ya que muchas estructuras de tipo hueco se representan mejor mediante objetos algebraicos como grupos y anillos. La topología algebraica se originó con la topología combinatoria, pero fue más allá probablemente por primera vez en la década de 1930 cuando se desarrolló la cohomología Čech. Una forma técnica de decir esto es que la topología algebraica se ocupa de los functores de la categoría topológica de grupos y homomorfismos. Aquí, los functores son una especie de filtro, y dado un espacio de "entrada", arrojan un resultado o salida. El objeto devuelto (generalmente un grupo o anillo) es entonces una representación de la estructura de huecos del espacio, en el sentido de que este objeto algebraico es un vestigio de cómo era el espacio original (es decir, se pierde mucha información, pero de alguna manera una especie de "sombra" del espacio se retiene, lo suficiente de una sombra para comprender algún aspecto de su estructura de huecos, pero no más. La idea es que los functores arrojan como resultado objetos mucho más simples con los que tratar. Debido a que los espacios en sí mismos son muy complicados, son inmanejables sin tener en cuenta aspectos particulares.” Complementariamente, puede definirse entonces de forma simple y sintética un funtor como un tipo de función matemática que asocia a un espacio topológico un grupo, un anillo, aunque también puede ser un espacio vectorial o cualquier otra estructura algebraica, pero desde la topología (y la topología algebraica es una rama suya) no es de interés que el espacio sea asociado a un espacio vectorial sino a un grupo o un anillo, para obtener simplemente una representación más manejable del espacio topológico de estudio (continuando sin considerar cuestiones métricas), seguramente por ello es que no fueron mencionados por Weisstein en la cita anterior.

REFERENCIAS

Berkeley Math Circle. (4 de Marzo de 2018). *Mathematical Cut-and-Paste: An Introduction to the Topology of Surfaces.* Obtenido de https://mathcircle.berkeley.edu/sites/default/files/handouts/2018/topology_of_surfaces_2018_0.pdf

Carlson, S. C. (12 de Febrero de 2021). *Topology*. Obtenido de Mathematics: https://www.britannica.com/science/topology

Croom, F. H. (2008). *Principles of Topology.* New Delhi: Cengage Learning India Private Limited.

HAUSDORFF, F. (1914). *GRUNDZÜGE DER MENGENLEHRE.* Leipzig: VERLAG VON VEIT & COMP.

James, I. M. (1999). *History of Topology.* Amsterdam: Elsevier.

Kahn, C. H. (2001). *Pythagoras and the Pythagoreans. A Brief History.* Indianapolis: Hackett Publishing Company, Inc.

KAPLAN, W. (1985). *CÁLCULO AVANZADO.* MÉXICO, D.F.: COMPAÑÍA EDITORIAL CONTINENTAL, S.A. DE C.V., MÉXICO.

Kelley, J. L. (1962). *Topología General.* Buenos Aires: Eudeba.

Lakatos, I. (2015). *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery.* Cambridge, United Kingdom: Cambridge Univeristy Press.

Lambrechts, P. (Marzo de 2009). *The Poincaré conjecture and the shape of the universe*. Obtenido de Wellesley College: https://www.wellesley.edu/sites/default/files/assets/lambrechts-colloq.pdf

Murasugi, K. (1996). *KNOT THEORY AND ITS APPLICATIONS.* (B. Kurpita, Trad.) Boston: Birkhäuser Boston. Obtenido de https://www.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/papers/murasug3.pdf

Real Academia Española. (11 de Febrero de 2021). *agregado, da*. Obtenido de Edición del Tricentenario | Actualización 2020: https://dle.rae.es/agregado?m=form

Real Academia Española. (11 de Febrero de 2021). *Combinar*. Obtenido de Edición del Tricentenario | Actualización 2020: https://dle.rae.es/combinar?m=form

Real Academia Española. (11 de Febrero de 2021). *compuesto, ta*. Obtenido de Edición del Tricentenario | Actualización 2020: https://dle.rae.es/compuesto?m=form

Real Academia Española. (11 de Febrero de 2021). *cuerpo*. Obtenido de Edición del Tricentenario | Actualización 2020: https://dle.rae.es/cuerpo?m=form

Real Academia Española. (27 de Enero de 2021). *Diccionario de la Lengua Española | Edición del Centenario (Actualización 2020)*. Obtenido de topología: https://dle.rae.es/topolog%C3%ADa?m=form

Real Academia Española. (11 de Febrero de 2021). *radical*. Obtenido de Edición del Tricentenario | Actualización 2020: https://dle.rae.es/radical?m=form

Ríbnikov, K. (1974). *Historia de las Matemáticas.* Moscú: Editorial Mir.

Rosental, M. M., & Iudin, P. F. (1971). *DICCIONARIO FILOSÓFICO.* San Salvador: Ediciones Tecolut.

Rousan, K. A. (2019). Topological Shapes and Their Significance: Playing with Loops, Scissors and Glue. *arXiv*, 1-7. Obtenido de https://arxiv.org/pdf/1905.13481.pdf

Weisstein, E. (11 de Enero de 2021). *Algebraic Topology*. Obtenido de MathWorld-A Wolfram Web Resource: https://mathworld.wolfram.com/AlgebraicTopology.html

Weisstein, E. (11 de Enero de 2021). *Point-Set Topology*. Obtenido de MathWorld-A Wolfram Web Resource: https://mathworld.wolfram.com/Point-SetTopology.html

Weisstein, E. (8 de Febrero de 2021). *Stretch*. Obtenido de MathWorld-A Wolfram Web Resource: https://mathworld.wolfram.com/Stretch.html

Weisstein, E. (8 de Febrero de 2021). *Topology*. Obtenido de MathWorld-A Wolfram Web Resource: https://mathworld.wolfram.com/Topology.html

Weisstein, E. (8 de Febrero de 2021). *Transformation*. Obtenido de MathWorld-A Wolfram Web Resource: https://mathworld.wolfram.com/Transformation.html

Weisstein, E. (https://mathworld.wolfram.com/Twist.html de Febrero de 2021). *Twist*. Obtenido de MathWorld-A Wolfram Web Resource: 8

Wikipedia. (13 de Diciembre de 2020). *Deformation (Mathematics)*. Obtenido de Algebraic geometry | Differential algebra: https://en.wikipedia.org/wiki/Deformation_(mathematics)

Wikipedia. (25 de Diciembre de 2020). *Seven Bridges of Königsberg*. Obtenido de 1735 in science: https://en.wikipedia.org/wiki/Seven_Bridges_of_K%C3%B6nigsberg

Wikipedia. (17 de Abril de 2020). *Topologia*. Obtenido de Dobre Artykuły: https://pl.wikipedia.org/wiki/Topologia

Wikipedia. (10 de Enero de 2021). *Inverse element*. Obtenido de Abstract algebra: https://en.wikipedia.org/wiki/Inverse_element

Wikipedia. (31 de Enero de 2021). *Topoisomerasa*. Obtenido de Replicación de ADN: https://es.wikipedia.org/wiki/Topoisomerasa